Zur Theorie des Hodographen.

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der Doctorwürde

der

philosophischen Facultät

der

Universität Rostock

vorgelegt

von

Otto Gerlach

Parchim.

Rostock.

Universitäts-Buchdruckerei von Adler's Erben.

1889.

Referent: Professor Dr. Krause.

Meinem hochverehrten Lehrer

Herrn Professor Dr. M. Krause

gewidmet.

Inhaltsangabe.

Einleitung.

Zusammenhang der Hodographentheorie mit der konformen Abbildung.

I. Teil.

Satz:

Bildet man eine beliebige in der z Ebene erfolgende Bewegung $f(xy) = 0$ durch die Funktionen $Z = F(z)$ und $\zeta_1 = \frac{dZ}{dz} \cdot \frac{dz}{dt}$ auf $f_1(uv) = 0$ und auf $f_3(\xi_1\eta_1) = 0$ ab, so ist $f_3 = 0$ der Hodograph der Bewegung $f_1 = 0$.

Beweis § 1. Besonderer Fall des Satzes § 2. Beispiel § 3. Zweiter besonderer Fall § 4. Beispiele § 5—6. Schlussbemerkungen § 7.

II. Teil.

Aufgaben.

Erste Aufgabe: $\frac{dz}{dt}$ ist als Funktion von z gegeben, es soll für ein gegebenes Z das entsprechende ζ_1 bestimmt werden.

$f(z) = (a + a_1 i)z + b + b_1 i$ § 8.

$f(z) = \frac{1}{(a + a_1 i)z + b + b_1 i}$ § 9.

$f(z) = (a + a_1 i)z^2 + (b + b_1 i)z + c + c_1 i$ § 10.

Andres Lösungsverfahren § 11.

Schlussbemerkungen § 12.

Zweite Aufgabe: Eine gegebene Bewegung so abzubilden, dass sie der Hodograph ihrer Abbildung ist.

Lösung § 13. Beispiele § 14. Bewegungsgesetze, denen Kreishodographen entsprechen § 15.

Dritte Aufgabe: Eine gegebene Bewegung auf ihrem Hodographen abzubilden. Lösung § 16. Beispiele § 17.

Wenn man von einem festen Punkte aus Vektoren zieht, die die Geschwindigkeit eines bewegten Punktes für jeden Zeitpunkt der Bewegung nach Grösse und Richtung darstellen, so bilden die aufeinanderfolgenden Endpunkte dieser Vektoren eine Kurve, welche von Hamilton, dem Erfinder dieser Konstruktion (vergl. H., Elemente der Quaternionen), der Hodograph der Bewegung genannt ist.

Hamilton hat (im zweiten Buch des genannten Werkes) ausführlich die Beziehungen untersucht, die zwischen der Bahn eines materiellen Punktes, der nach dem Newton'schen Gesetz angezogen wird, und ihrem Hodographen bestehen; unter den vielen Sätzen, die sich a. a. O. entwickelt finden, sind die folgenden zwei von besonderer Wichtigkeit:

I. Der Hodograph der Newton'schen Centralbewegung ist ein Kreis, dessen Radius gleich der Beschleunigung in der Einheit der Entfernung vom Centrum der Beschleunigungen, dividiert durch die doppelte Sektoren-Geschwindigkeit, ist.

II. Das Gesetz des umgekehrten Quadrats ist das einzige Gesetz der Centralbewegung, dem ein Kreishodograph entspricht, wenn nicht die Bahn in Wirklichkeit gerade ein Kreis ist und überdies der Mittelpunkt der Kraft in ihrem Mittelpunkt liegt.

Der zweite der angeführten Sätze legte die Frage nahe, ob Kräfte, die nicht durch einen festen Punkt gehen, Bewegungen erzeugen können, denen Kreishodographen entsprechen; die Untersuchung dieser Frage führte auf Beziehungen der isogonalen Verwandtschaft, welche zwischen Bewegungen und ihren Hodographen bestehen. Die Entwickelung dieser Beziehungen, die u. a. auch die oben gestellte Frage beantworten, bilden den Inhalt der folgenden Arbeit.

Wenn 2 Ebenen z und Z vorgelegt sind, die in der Beziehung

$$z = F(z) \text{ oder } u + vi = F(x + yi)$$

stehen, und wenn ein Punkt der z Ebene sich in einer gegebenen Bahn $f(xy) = 0$ mit der Geschwindigkeit $V = \frac{ds}{dt} = 1$ bewegt, dann bewegt sich Z in der entsprechenden Bahn $f_1(uv) = 0$ mit einer Geschwindigkeit, deren Grösse graphisch durch den Radius Vektor des Differential-Quotienten von Z nach z, also durch $\rho = \left|\frac{dZ}{dz}\right|$ dargestellt wird. — Es wird nun die „Ebene des Differential-Quotienten“

$$\zeta = \xi + \eta i = \frac{dZ}{dz}$$

eingeführt; die Abbildung der Bahn $f(xy) = 0$ in ζ heisse $f_2(\xi\eta) = 0$. Die Grösse der Geschwindigkeit des sich in $f_1(uv) = 0$ bewegenden Punktes wird dann durch den Radius Vektor vom Nullpunkt nach der Bahn $f_2(\xi\eta) = 0$, also durch $O\zeta$, dargestellt; die Richtung der Bewegung des Punktes Z wird aber im Allgemeinen nicht mit der Richtung von $O\zeta$ übereinstimmen, denn das Argument des Differentialquotienten $\frac{dZ}{dz}$, also auch der Richtungswinkel ϑ von ρ gegen die reelle Axe, ist gleich dem Winkel, um welchen man die

Tangente an $f(xy) = 0$ (gegen den Zeiger der Uhr) drehen muss, damit sie der Tangente in dem entsprechenden Punkte der Bahn $f_1(uv) = 0$ parallel wird.

Setzt man nun $\frac{dy}{dx} = tg\varphi$, $\frac{dv}{du} = tg\Phi$, so besteht für entsprechende Werte von z und Z die Gleichung

$$\varphi + \vartheta = \Phi.$$

Diese 3 Winkel sind im Allgemeinen Funktionen von x und y. Sind jedoch in einem besonderen Fall die Beziehungen zwischen den beiden Ebenen und auch die vorgelegte Bahngleichung in der Art bestimmt, dass ϑ gleich Φ ist, so stellt der Radius Vektor $O\zeta$ die Geschwindigkeit des Punktes Z nicht nur der Grösse, sondern auch der Richtung nach dar, $f_2(\xi\eta) = 0$ ist dann also der Hodograph der Bahn $f_1(uv) = 0$ (über die weitere Ausführung dieses besonderen Falles vergl. § 2).

Ist dagegen ϑ ungleich Φ, oder ist die Geschwindigkeit des bewegten Punktes der z Ebene zwar gleichmässig aber von 1 verschieden, oder ist endlich die Geschwindigkeit des Punktes z eine Funktion der Zeit, so ist $f_2(\xi\eta) = 0$ nicht der Hodograph der Bewegung des Punktes Z; es lässt sich dann jedoch ein Faktor p derart bestimmen, dass die Abbildung der vorgelegten Bewegung $f(xy) = 0$ durch $\zeta_1 = p \cdot \zeta$ der Hodograph der Bewegung des Punktes Z wird.

Die an den allgemeinen Fall sich eng anschliessenden Aufgaben:

1) eine vorgelegte Bewegung auf solche Art abzubilden, dass dieselbe der Hodograph ihrer Abbildung wird, und
2) eine vorgelegte Bewegung auf solche Art abzubilden, dass die Abbildung der Hodograph der gegebenen Bewegung wird,

werden im zweiten Teil behandelt werden.

Ebenda wird die im Eingang erwähnte Frage, ob Kräfte, welche nicht durch einen Punkt gehen, Bewegungen erzeugen können, denen Kreishodographen entsprechen, beantwortet werden,

Durège behandelt in einem Aufsatz: „Ueber Anwendung der imaginären Grössen in der Mechanik" (Grunert's Archiv, Band 40) eine verwandte Aufgabe: vermittelst Gauss'scher Koordinaten aus dem Ausdruck der Kraft die Bahngleichung des bewegten Punktes abzuleiten; das dort befolgte Verfahren ist jedoch von dem hier angewendeten verschieden; andere Arbeiten über diesen Gegenstand sind dem Verfasser nicht bekannt.

I.

Bildet man eine beliebige, in der z Ebene erfolgende Bewegung $f(xy) = 0$ durch die Funktionen

$$Z = F(z) \text{ und}$$

$$\zeta_1 = \frac{dZ}{dz} \cdot \frac{dz}{dt}$$

auf $f_1(uv) = 0$ und auf $f_3(\xi_1\eta_1) = 0$ ab, so ist $f_3(\xi_1\eta_1) = 0$ der Hodograph der Bewegung $f_1(uv) = 0$.

§ 1. Es ist gegeben § 1.

$$Z = F(z) \text{ oder } u + vi = F(x + yi);$$

der Bewegung eines Punktes z in der Bahn $f(xy) = 0$ nach einem beliebig vorgelegten Gesetz entspreche in der Z Ebene eine Bewegung in der Bahn $f_1(uv) = 0$, und in der Ebene des Differentialquotienten $\zeta = \frac{dZ}{dz}$ die Bahn $f_2(\xi\eta) = 0$. Die zu lösende Aufgabe besteht nun darin, zu untersuchen, mit welchem Faktor p man ζ zu multiplicieren hat, damit die Abbildung von $f(xy) = 0$ auf der neuen Ebene $\zeta_1 = p\zeta$ derHodograph der Bewegung in Z wird.

Die Geschwindigkeit des Punktes z ist

$$V = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$$

die Richtung derselben ist bestimmt durch die Gleichung

$$tg\varphi = \frac{dy}{dt} : \frac{dx}{dt}.$$

Der absolute Betrag ρ des Differentialquotienten von Z nach z giebt das Vergrösserungsverhältnis an,

in welchem entsprechende Linienelemente beider Ebenen zu einander stehen, mithin auch das Geschwindigkeitsverhältnis, mit denen entsprechende Bahnen beider Ebenen durchlaufen werden; das Argument ϑ des Differentialquotienten von Z nach z giebt den Winkel an, um welchen die Richtungen entsprechender Linienelemente beider Ebenen von einander abweichen, es ist also

$$V_1 = V \cdot \rho, \qquad \Phi = \varphi + \vartheta;$$

da nun

$$\frac{dZ}{dz} = \frac{d(u+vi)}{d(x+yi)} = \frac{\partial u}{\partial x} + i \cdot \frac{\partial v}{\partial x}$$

ist, so folgt

$$V_1 = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} \cdot \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2}$$

$$tg\Phi - tg(\varphi + \vartheta) = \left(\frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{\partial v}{\partial x}\frac{dx}{dt}\right) : \left(\frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} - \frac{\partial v}{\partial x} \cdot \frac{dy}{dt}\right)$$

Berechnet man V_1 und Φ nach den Gleichungen

$$V_1 = \sqrt{\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dv}{dt}\right)^2}$$

$$tg\Phi = \frac{dv}{dt} : \frac{du}{dt}$$

indem man die partiellen Differentialquotienten von u und v nach x und y einführt, so erhält man Werte, die von den obigen etwas abweichen, sich aber leicht in die oben stehende Form überführen lassen, wenn man berücksichtigt, dass

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$$

ist.

Aus der Ebene des Differentialquotienten

$$\zeta = \frac{dZ}{dz} \text{ oder } \xi + \eta i = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}$$

soll nun die Ebene des Hodographen

$$\zeta_1 = F_1(z) \text{ oder } \xi_1 + \eta_1 i = F_1(x+yi)$$

abgeleitet werden, d. h. es soll eine Ebene ζ_1 derart bestimmt werden, dass wenn Z sich nach bestimmtem Gesetz bewegt, der Radius Vektor von O nach ζ_1 in jedem Zeitpunkt die Geschwindigkeit des Punktes Z nach Grösse und Richtung darstellt.

Es sollen also die Gleichungen bestehen

$$\rho_1 = \sqrt{\xi_1^{\,2} + \eta_{11}^{\,2}} = V_1$$

$$tg\vartheta = \frac{\eta_{11}}{\xi_1} = tg\Phi$$

Aus beiden Gleichungen ergiebt sich

$$\xi_1 = V_1 \cdot \cos\Phi, \qquad \eta_{11} = V_1 \cdot \sin\Phi$$

also $$\zeta_1 = \xi_1 + \eta_{11} i = V_1(\cos\Phi + i\sin\Phi)$$

Ferner ist

$$tg\Phi = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{dy}{dt} + \frac{\partial v}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt}\right) : \left(\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt} - \frac{\partial v}{\partial x}\cdot\frac{dy}{dt}\right) = a : b$$

also

$$\cos\Phi = b : \sqrt{a^2 + b^2}, \qquad \sin\Phi = a : \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\cdot\frac{dy}{dt}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} \cdot \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2} = V_1$$

also ist

$$\zeta_1 = \xi_1 + \eta_{11} i = b + a \cdot i$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt} - \frac{\partial v}{\partial x}\cdot\frac{dy}{dt} + i\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{dy}{dt} + \frac{\partial v}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt}\right)$$

$$= \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}\right)\frac{dx}{dt} + \left(-\frac{\partial v}{\partial x} + i\frac{u}{\partial x}\right)\frac{dy}{dt}$$

$$= \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i \cdot \frac{\partial v}{\partial x}\right)\frac{dx}{dt} + i\left(i \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x}\right)\cdot\frac{dy}{dt}$$

$$= \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}\right)\left(\frac{dx}{dt} + i\frac{dy}{dt}\right)$$

$$= \frac{dZ}{dz}\cdot\frac{dz}{dt}$$

$$\zeta_1 = \zeta \cdot \frac{dz}{dt}$$

Diese Gleichung lautet in Worten:

Bildet man eine beliebige, in der z Ebene erfolgende Bewegung $f(xy) = 0$ durch die Funktionen

$$Z = F(z) \text{ und } \zeta_1 = \frac{dF(z)}{dz} \cdot \frac{dz}{dt}$$

auf $f_1(uv) = 0$ und auf $f_3(\xi_1 \eta_1) = 0$ ab, so ist $f_3(\xi_1 \eta_1) = 0$ der Hodograph der Bewegung $f_1(uv) = 0$.

§ 2. § 2. Die in § 1 entwickelten Beziehungen gestalten sich am einfachsten in dem Fall dass $\frac{dz}{dt}$ gleich 1 ist, dann ist nämlich $\zeta_1 = \zeta$, d. h. die Ebene des Differentialquotienten ist zugleich die Ebene des Hodographen. Dieser schon in der Einleitung erwähnte Fall tritt nun ein, wenn $z = t + c + c_1 i$ ist, wo c und c_1 beliebige reelle Konstanten bedeuten. Zerlegt man diese Gleichung in den reellen und den imaginären Teil, so erhält man als Bewegungsgesetz und Bahngleichung für die z Ebene

$$x = t + c, \quad y = c_1$$

d. h. der Punkt z bewegt sich in der reellen Axe oder in einer Parallelen der reellen Axe mit der gleichmässigen Geschwindigkeit 1. Der Richtungsunterschied φ der Bewegung mit der reellen Axe ist also stets gleich Null, folglich ist

$$\vartheta = \Phi$$

d. h. der Radius Vektor $O\zeta$ ist stets der Tangente in dem entsprechenden Punkt der Bahn $f(uv) = 0$ parallel, und da ferner $V = 1$, also $V_1 = \rho$ ist, so ist in der That die Ebene des Differentialquotienten zugleich die Ebene des Hodographen (für die Abbildung der Parallelenschar $y = c_1$).

Bildet man also die Parallelenschar $y = c_1$ der z Ebene durch eine beliebige Funktion $Z = F(z)$ auf der Kurvenschar $f(v) = 0$ ab, ferner durch die Funktion $\zeta = \frac{dZ}{dz}$ auf der Kurvenschar $f_2(\xi\eta) = 0$ ab, so ist, wenn z sich in der Geraden $y = c_1$ mit der Geschwindigkeit 1 bewegt, die Kurve $f_2(\xi\eta c_1) = 0$ der Hodograph der Bewegung $f_1(uvc_1) = 0$.

§ 3. Beispiel. Gegeben sei die Funktion $Z = \cos z$, daraus folgt $\zeta = \frac{dZ}{dz} = -\sin z$ § 3.

1) $u = \cos x \cdot \mathfrak{Cos}\, y, \qquad v = -\sin x \cdot \mathfrak{Sin}\, y$

2) $\xi = -\sin x\, \mathfrak{Cos}\, y, \qquad \eta = -\cos x\, \mathfrak{Sin}\, y$

Die Geraden $y = c$ werden abgebildet auf

3) $(u : \mathfrak{Cos}\, c)^2 + (v : \mathfrak{Sin}\, c)^2 = 1$

4) $(\xi : \mathfrak{Cos}\, c)^2 + (\eta : \mathfrak{Sin}\, c)^2 = 1$

Der Hodograph einer Ellipse aus der Schar 3) ist also eine gleiche und gleichgelegene Ellipse der Schar 4), die Punkte Z und ζ wandern demnach auf derselben Ellipse, fallen aber nie zusammen, wie eine Vergleichung ihrer Koordinaten in 1) und 2) lehrt.

Für 2 entsprechende Punkte z und ζ ist

$$\frac{v}{u}\,\frac{\eta}{\xi} = \frac{-\sin x\, \mathfrak{Sin}\, c}{\cos x\, \mathfrak{Cos}\, c} \cdot \frac{-\cos x\, \mathfrak{Sin}\, c}{-\sin x\, \mathfrak{Cos}\, c} = -\frac{\mathfrak{Sin}^2 c}{\mathfrak{Cos}^2 c}$$

Da nun $\frac{v}{u}$ und $\frac{\eta}{\xi}$ die Tangenten der Winkel sind, die die Durchmesser nach beiden Punkten Z und ζ mit der reellen Axe bilden, und da ferner das Produkt beider Tangenten gleich dem negativen Quadrat über dem Quotienten aus den Halbaxen ist, so ergiebt sich folgender Satz:

Z und ζ wandern so auf der Ellipse, dass sie sich stets in Endpunkten konjugierter Durchmesser befinden; die Geschwindigkeit des Punktes Z wird

nach Grösse und Richtung durch den Halbmesser dargestellt, der dem durch Z gehenden konjugiert ist. (In diesem Fall ist also $f_2(\xi\eta) = 0$ Hodograph für $f_1(uv) = 0$ und gleichzeitig $f_1(uv) = 0$ Hodograph für $f_2(\xi\eta) = 0$).

Dass 4) in der That die Gleichung des Hodographen für 3) ist, sieht man aus nachstehender Entwickelung:

Aus 3) ergiebt sich:

$$5) \qquad tg\Phi = \frac{dv}{du} = -\frac{u}{v} \cdot \frac{\mathfrak{Sin}^2 c}{\mathfrak{Cos}^2 c}$$

Die Geschwindigkeit des Punktes Z ist $\frac{dS}{dt}$, wenn S den Bogen der Kurve 3) bedeutet. Da nun z sich auf der Geraden $y = c$ bewegt, so ist für die z Ebene $\frac{ds}{dt} = \frac{dx}{dt} = 1$, also $dt = dx$; es ist also

$$\frac{dS}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{dv}{du}\right)^2} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$= \sqrt{v^2 \mathfrak{Cos}^4 c + u^2 \mathfrak{Sin}^4 c} : (\mathfrak{Cos}\, c \cdot \mathfrak{Sin}\, c)$$

$$= \sqrt{\mathfrak{Cos}^4 c - u^2} : \mathfrak{Cos}\, c$$

$$6) \qquad V_1 = \frac{dS}{dx} = \sqrt{\mathfrak{Cos}^2 c - \left(\frac{u}{\mathfrak{Cos}\, c}\right)^2}$$

Die Gleichungen 5) und 6) stellen die Geschwindigkeit des Punktes Z und die Richtung derselben dar; dem Punkte $Z = u + vi$ entspricht $\zeta = -\sin x\, \mathfrak{Cos}\, c - i \cos x\, \mathfrak{Sin}\, c$, und der Radius Vektor ρ dieses Punktes ist

$$\rho = \sqrt{\sin^2 x\, \mathfrak{Cos}^2 c + \cos^2 x\, \mathfrak{Sin}^2 c} = \sqrt{\mathfrak{Cos}^2 c - \cos^2 x}$$

$$7) \qquad \rho = \sqrt{\mathfrak{Cos}^2 c - \left(\frac{u}{\mathfrak{Cos}\, c}\right)^2}$$

Endlich ist $tg\vartheta = \frac{\eta}{\xi} = \cos x\, \mathfrak{Sin}\, c : \sin x\, \mathfrak{Cos}\, c$; setzt

man nun für $\sin x$ und $\cos x$ ihre Werte in u und v aus 1) ein, so folgt

8) $$tg\vartheta = \frac{u \cdot \mathfrak{Sin}^2 c}{-v \cdot \mathfrak{Cos}^2 c}$$

Aus 5) und 8) ergiebt sich $\vartheta = \Phi$, aus 6) und 7) $V_1 = \rho$, der Radius Vektor OZ stellt also die Geschwindigkeit des entsprechenden Punktes Z nach Grösse und Richtung dar, d. h. 4) ist die Hodographenschar für 3).

§ 4. Eine Erweiterung des im zweiten Paragraphen behandelten Falles $\left(\frac{dz}{dt} = 1\right)$ erhält man, wenn man den Differentialquotienten $\frac{dz}{dt}$ zwar konstant aber von 1 verschieden annimmt. § 4.

$$\frac{dz}{dt} = c + c_1 i$$

Man setzt $c = m \cos\alpha$, $c_1 = m \sin\alpha$. Dann ist

$$\frac{dx}{dt} = m\cos\alpha, \qquad x = mt\cos\alpha + b$$

$$\frac{dy}{dt} = m\sin\alpha, \qquad y = mt\sin\alpha + b_1$$

Der Punkt z bewegt sich in der Geraden

$$(x - b)\sin\alpha = (y - b_1)\cos\alpha$$

mit der gleichmässigen Geschwindigkeit m.

Ist $m = 1$, so ist

$$\frac{dz}{dt} = \cos\alpha + i\sin\alpha = e^{\alpha i}, \qquad \zeta_1 = \zeta \cdot e^{\alpha i},$$

d. h. man erhält die Ebene des Hodographen aus der Ebene des Differentialquotienten durch einfache Drehung um den Winkel α, beide Ebenen stehen in der Verwandtschaft der Kongruenz.

Ist dagegen $m \lessgtr 1$, so ist

$$\frac{dz}{dt} = m \cdot e^{\alpha i}, \quad \zeta_1 = m\zeta \cdot e^{\alpha i};$$

die Ebene des Hodographen entsteht aus der Ebene des Differentialquotienten, indem man letztere zunächst um den Winkel α dreht und dann alle Radien (vom Nullpunkt) $m$fach vergrössert — beide Ebenen stehen in einer Verwandtschaft der Aehnlichkeit.

Zu demselben Ergebnis gelangt man auch durch folgende Betrachtung:

Aus der Gleichung $\Phi = \varphi + \vartheta$ (vgl. S. 9) folgt

$$\Phi - \vartheta = \varphi.$$

Ist nun φ unveränderlich, so ist es auch die Differenz $\Phi - \vartheta$, d. i. der Unterschied in der Richtung des Radius Vektor $O\zeta$ und der Tangente in der ZEbene. Durch eine Drehung der ganzen ζEbene um den Winkel φ erhalten alle Radien $O\zeta$ den Richtungswinkel $\varphi + \vartheta = \Phi$, sind also jetzt den entsprechenden Tangenten der ZEbene parallel; die Bedingung, dass φ den konstanten Wert α habe, ist erfüllt, wenn $f(xy) = 0$ eine Gerade $y = x tg\alpha + b$ darstellt. Eine Drehung um den Winkel α ohne Aenderung der Längenverhältnisse erreicht man durch die Abbildung $\zeta_1 = e^{\alpha i} \cdot \zeta$; wenn nun die Geschwindigkeit des Punktes z gleich 1 ist, so bedeutet der Radius Vektor des Differentialquotienten $\frac{dZ}{dz}$ nicht nur das Vergrösserungs- oder Geschwindigkeitsverhältnis der beiden Ebenen Z und z, sondern zugleich auch die absolute Geschwindigkeit des Punktes Z, der Radius Vektor $O\zeta_1$ stellt also die Geschwindigkeit des Punktes Z nach Richtung und Grösse dar —

mit anderen Worten: die Ebene $\zeta_1 = e^{\alpha i} \cdot \zeta$ ist die Hodographenebene der Ebene Z in Bezug auf alle entsprechenden Bewegungen der z Ebene, welche den Bedingungen $\varphi = \alpha$, $\frac{ds}{dt} = 1$ genügen.

Ist die Geschwindigkeit des Punktes z

$$\frac{ds}{dt} = m \left(m \gtrless 1 \right),$$

so stellen die Radien $O\zeta_1$ der Ebene $\zeta_1 = \zeta \cdot e^{\alpha i}$ wohl die Richtung, nicht aber die Grösse der Geschwindigkeit des Punktes Z dar, letztere ist nämlich das $m$fache des Radius Vektor $O\zeta_1$. Bildet man jedoch ζ nicht auf $e^{\alpha i} \cdot \zeta$, sondern auf der Ebene $\zeta_1 = m \cdot e^{\alpha i} \cdot \zeta$ ab, so werden alle Radien der ζ Ebene um α gedreht und zugleich in dem Verhältnis $m : 1$ vergrössert, also ist nun die Ebene $\zeta_1 = me^{\alpha i} \cdot \zeta$ Hodographenebene für Z.

Man kann diesen Fall — $\frac{dz}{dt} = c + c_1 i$ — in folgenden Worten aussprechen:

Bildet man die Gerade der z Ebene $y = x tg \alpha + b$, die mit der Geschwindigkeit $\frac{ds}{dt} = m$ durchlaufen wird, durch eine beliebige Funktion $Z = F(z)$ auf der Kurve $f_1(uv) = 0$ und durch $\zeta_1 = m \cdot e^{\alpha i} \cdot \frac{dZ}{dz}$ auf der Kurve $f_3(\xi_1 \eta_1) = 0$ ab, so ist $f_3 = 0$ der Hodograph der Bewegung $f_1 = 0$.

§ 5. Beispiele für den Fall $\frac{dz}{dt} = \cos\alpha + i \sin\alpha$. § 5.

1 Beispiel: $Z = z^2$, also $\zeta_1 = 2e^{\alpha i} \cdot z$

1) $u = x^2 - y^2$, $v = 2xy$

2) $\xi_1 = 2(x \cos\alpha - y \sin\alpha)$, $\eta_1 = 2(x \sin\alpha + y \cos\alpha)$

Der Geraden $y = x tg\alpha + b$ entspricht in Z

3) $(u \sin 2\alpha - v \cos 2\alpha)^2 - 4b^2 \cos^2\alpha \cdot (u \cos 2\alpha + v \sin 2\alpha) = 4b^2 \cos^4\alpha.$

Durch Drehung um 2α nimmt 3) die Form an

$$v_1^2 = 4b^2 \cos^2\alpha (u_1 + b^2 \cos^2\alpha)$$

3) stellt also eine Parabel dar, deren Axe mit der reellen Axe den Winkel 2α bildet.

In ζ_1 entspricht der Geraden $y \quad x tg\alpha + b$ die Gerade

4) $$-\xi_1 \sin 2\alpha + \eta_1 \cos 2\alpha = 2b \cos 2\alpha,$$

dieselbe ist also der Hodograph der Parabel 3).

Nachweis durch Rechnung:

$$\frac{dy}{dx} = tg\alpha, \frac{ds}{dt} = \sqrt{1 + tg^2\alpha} \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{1}{\cos\alpha} \cdot \frac{dx}{dt};$$

da nun die Geschwindigkeit in z gleich 1 sein soll, so muss $\frac{dx}{dt} = \cos\alpha$ sein. Nun ist

$$V_1 = \frac{dS}{dt} = \sqrt{1 + \left(\frac{dv}{du}\right)^2} \cdot \frac{du}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}$$

5) $$tg\Phi = \frac{dv}{du} = \frac{x tg\alpha + x tg\alpha + b}{x - tg\alpha(x tg\alpha + b)} = \frac{2x tg\alpha + b}{x(1 - tg^2\alpha) - b tg\alpha}.$$

Setzt man diesen Ausdruck, sowie die Werte für $\frac{du}{dx}$ und $\frac{dx}{dt}$ in $\frac{dS}{dt}$ ein, so ergiebt sich nach einigen Umformungen:

6) $$\frac{dS}{dt} = V_1 = \frac{2}{\cos\alpha} \cdot \sqrt{x^2 + 2bx \sin\alpha \cos\alpha + b^2 \cos^2\alpha}.$$

Andererseits ist

7) $$\frac{\eta_1}{\xi_1} = \frac{x \sin\alpha + y \cos\alpha}{x \cos\alpha - y \sin\alpha} = \frac{2x tg\alpha + b}{x(1 - tg^2\alpha) - b tg\alpha} = tg\Phi$$

$$\rho_1 = \sqrt{\xi_1^2 + \eta_1^2} = 2\sqrt{x^2 \cos^2\alpha + y^2 \sin^2\alpha + x^2 \sin^2\alpha + y^2 \cos^2\alpha} = 2\sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\rho_1 = \frac{2}{\cos\alpha} \sqrt{x^2 + 2bx \cos\alpha \sin\alpha + b^2 \cos^2\alpha} = V_1,$$

also

$$\rho_1 = V_1, \quad tg\vartheta = tg\Phi.$$

2. Beispiel: $Z = 1 + z + e^{z} \quad \zeta_1 = e^{\alpha i}\left(1 + e^{z}\right)$

1) $\quad u = 1 + x + e^{x}\cos y, \quad v = y + e^{x}\sin y.$

Es soll die Abbildung der Parallelenschar $x = c$ untersucht werden.

2) $\quad u = 1 + c + e^{c}\cos y \qquad v = y + e^{c}\sin y.$

Setzt man $y_1 = y + \pi$, $u_1 = u - c$, $v_1 = v + \pi$, so geht 2) über in

$$u_1 = 1 - e^{c}\cos y_1 \qquad v_1 = y_1 - e^{c}\sin y_1.$$

Demnach stellt 2) eine Schar gedehnter und verschlungener Cykloiden dar, je nachdem c kleiner oder grösser als 0 ist; der Rollkreis hat den Radius 1 und rollt auf der Geraden $u = c$, der Abstand des erzeugenden Punktes vom Kreismittelpunkte ist e^{c}; für $c = 0$ ist 2) eine gewöhnliche Cykloide, deren Rückkehrpunkte in den Brennpunkten der Z Ebene — $Z = (2n+1)\pi i$ — liegen.

Da die Geraden $x = c$ mit der reellen Axe den Winkel $\frac{\pi}{2}$ bilden, so ist $e^{\alpha i} = i$, mithin $\zeta_1 = i\left(1 + e^{z}\right)$,

3) $\quad \xi_1 = -e^{c}\sin y, \qquad \eta_1 = 1 + e^{c}\cos y$

$$\xi_1^{\,2} + (\eta_1 - 1)^2 = e^{2c}$$

Die Hodographen sind Kreise um den Punkt $\zeta_1 = +i$ mit den Radien e^{c}.

§ 6. Beispiel für den Fall $\frac{dz}{dt} = m(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ § 6.

$$Z = 1 + z + e^{z}, \qquad y = x\,\mathrm{tg}\,\alpha + b$$

1) $\quad u = 1 + x + e^{x}\cos y, \quad v = y + e^{x}\sin y, \quad y = x\,\mathrm{tg}\,\alpha + b.$

Diese 3 Gleichungen 1) stellen die Kurve der Z Ebene dar, welche der Geraden $y = x tg\alpha + b$ entspricht. Die Hodographenebene ist

$$\zeta_1 = m \cdot e^{\alpha i}\left(1 + e^{z}\right).$$

Die Gleichung des Hodographen erhält man, indem man aus diesen 2 Gleichungen x und y als Funktionen von ξ_1 und η_1 berechnet und die Werte dann in $y = x tg\alpha + b$ einsetzt.

$$m\left(1 + e^{x}\cos y + i \cdot e^{x}\sin y\right) = (\cos\alpha - i\sin\alpha)(\xi_1 + \eta_1 i)$$

$$m + m \cdot e^{x}\cos y = \xi_1 \cos\alpha + \eta_1 \sin\alpha$$

$$m \cdot e^{x}\sin y = -\xi_1 \sin\alpha + \eta_1 \cos\alpha$$

$$m^2 e^{2x} \cdot (\xi_1 \cos\alpha + \eta_1 \sin\alpha - m)^2 + (-\xi_1 \sin\alpha + \eta_1 \cos\alpha)^2$$
$$= (\xi_1 - m\cos\alpha)^2 + (\eta_1 - m\sin\alpha)^2$$

2) $$x = lg\,\frac{1}{m}\sqrt{(\xi_1 - m\cos\alpha)^2 + (\eta_1 - m\sin\alpha)^2}$$

$$tgy = (-\xi_1 \sin\alpha + \eta_1 \cos\alpha) : (\xi_1 \cos\alpha + \eta_1 \sin\alpha - m)$$

3) $$tgy = \left(\frac{\eta_1 - m\sin\alpha}{\xi_1 - m\cos\alpha} - tg\alpha\right) : \left(1 + tg\alpha \cdot \frac{\eta_1 - m\sin\alpha}{\xi_1 - m\cos\alpha}\right).$$

Beschreibt man vom Nullpunkt der ζ_1Ebene einen Kreis mit dem Radius m und zieht ferner einen Radius mit dem Richtungswinkel α, so schneidet dieser den Kreis in $M_\alpha = m\cos\alpha + m \cdot i \cdot \sin\alpha$, die Verbindungsline $\zeta_1 M_\alpha$ hat die Länge

$$R = \sqrt{(\xi_1 - m\cos\alpha)^2 + (\eta_1 - m\sin\alpha)^2},$$

die Tangente ihres Richtungswinkels ψ ist

$$tg\psi = (\eta_1 - m\sin\alpha) : (\xi_1 - m\cos\alpha).$$

Durch Einführung von R und ψ in 2) und 3) erhält man:

$$tgy = (tg\psi - tg\alpha) : (1 + tg\psi \cdot tg\alpha); \qquad y = \psi \quad \alpha; \qquad x = lg\,\frac{R}{m}.$$

Beide Werte (von x und y) setzt man in

$$y = x tg\alpha + b$$

ein und erhält dadurch

4) $$\psi - \alpha = tg\alpha \cdot lg \frac{R}{m} + b = tg\alpha \cdot lg \frac{R}{m \cdot e^{-b}}$$

4) stellt eine logarithmische Spirale dar, deren Centrum der Punkt M_α, deren Axe die Linie OM_α ist, letztere ist also der abgebildeten Geraden der z Ebene parallel. Die Lage des Centrums und der Axe ist von b unabhängig. Giebt man α und b alle möglichen Werte, so liegen die Mittelpunkte sämmtlicher Spiralen auf dem Kreise $\xi_1^2 + \eta_1^2 = m^2$, dessen Radius wie man sieht durch die Geschwindigkeit des Punktes z bedingt ist.

Die logarithmischen Spiralen 4) sind die Hodographen der Kurven 1), wenn z die Geraden $y = x tg\alpha + b$ mit der Geschwindigkeit m durchläuft.

§ 7. Bemerkungen über den allgemeinen Fall, dass $\frac{dz}{dt}$ nicht konstant, sondern eine Funktion von t (oder z) ist. § 7.

Es handelt sich hierbei um die Aufgabe, die Differentialgleichung

$$\frac{dz}{dt} = f(z)$$

zu lösen, der die Form

$$\frac{dz}{f(z)} = dt$$

gegeben wird.

Da z komplex ist, so besteht auch die Integrationskonstante aus einem reellen und einem imaginären Teil, zerfällt also in zwei willkürliche Konstanten. Die gesuchte Lösung hat demnach die Form:

$$f_1(x + yi) = t + c + c_1 i$$

und liefert, wenn man Reelles und Imaginäres trennt, 2 Gleichungen von der Form:

$$F_1(xy) = t + c, \qquad F_2(xy) = c_1.$$

Die zweite Gleichung stellt die Bahn des Punktes z dar, und zwar eine Schar von Kurven, die erste Gleichung stellt für jeden beliebigen Wert von t gleichfalls eine Kurvenschar dar; da die linken Seiten beider Gleichungen der reelle bez. der von i befreite imaginäre Teil einer Funktion von $x+yi$ sind, so müssen beide Kurvenscharen orthogonal sein.

Wenn $f(z)$ als Funktion von z bekannt ist, so kann man es auch als Funktion von t darstellen, und umgekehrt. In manchen Fällen ist es einfacher, statt der Gleichung

$$\frac{dz}{dt} = f(z)$$

die Gleichung

$$\frac{dz}{dt} = f_1(t)$$

zu lösen. Dieselbe liefert die Gleichung

$$z = \int f_1(t)dt + c + c_1 i$$

und diese lässt sich zerlegen in

$$x = F_1(t) + c, \qquad y = F_2(t) + c_1,$$

diese Gleichungen bestimmen die Bewegung des Punktes z; die Bahngleichung erhält man durch Elimination von t aus den letzten beiden Gleichungen.

Die eben gefundenen Beziehungen lassen Anwendungen auf die Lösung verschiedener Aufgaben zu.

1) $\frac{dz}{dt}$ ist als Funktion von z oder t gegeben. Durch Integration erhält man ein Bewegungsgesetz der z Ebene, welches durch eine beliebige Funktion $Z = F(z)$ auf einer Bewegung in Z und durch die Funktion $\zeta_1 = \frac{dZ}{dz} \cdot \frac{dz}{dt}$ auf dem Hodographen der Bewegung in Z ab-

gebildet wird. Aufgabe: Bewegung und Hodographen zu bestimmen.

In diesem Falle ist weder die Bewegung noch ihr Hodograph willkürlich; beide ergeben sich aus den vorgelegten Beziehungen.

2) ζ_1 ist als Funktion von t gegeben. Aufgabe: Eine Bewegung in Z zu bestimmen, für welche die vorgelegte Bewegung in ζ_1 der Hodograph ist.

3) Z ist als Funktion von t gegeben. Aufgabe: Eine Funktion ζ_1 zu bestimmen, welche die Hodographenebene der vorgelegten Bewegung ist.

Die Behandlung dieser Aufgaben bildet den zweiten Teil der Abhandlung.

II.

Aufgaben.

Erste Aufgabe. **$\frac{dz}{dt}$ ist als Funktion von z gegeben, es sollen Z und τ_1 bestimmt werden.**

§ 8. § 8. $$f(z) = \frac{dz}{dt} = (a + a_1 i)z + b + b_1 i.$$

Die Differentialgleichung

$$\frac{dz}{(a + a_1 i)z + b + b_1 i} = dt$$

liefert die Gleichung

$$lg[(a + a_1 i)z + b + b_1 i] = (a + a_1 i)t + c + c_1 i$$

$$z = \frac{1}{a + a_1 i} \cdot e^{(a + a_1 i)t + c + c_1 i} - \frac{b + b_1 i}{a + a_1 i}$$

Trennt man jetzt den reellen vom imaginären Teil, so folgt:

$$x = e^{at + c} \cdot \left[\frac{a}{a^2 + a_1^2} \cdot cos(a_1 t + c_1) + \frac{a_1}{a^2 + a_1^2} \cdot sin(a_1 t + c_1) \right] - \frac{ab + a_1 b_1}{a^2 + a_1^2}$$

$$y = e^{at + c} \cdot \left[\frac{-a_1}{a^2 + a_1^2} \cdot cos(a_1 t + c_1) + \frac{a}{a^2 + a_1^2} \cdot sin(a_1 t + c_1) \right] - \frac{ab_1 - a_1 b}{a^2 + a_1^2}$$

diese Gleichungen gehen, wenn man $\frac{a_1}{a} = tg\alpha$ setzt, über in

1a)
$$\begin{cases} x = c\cdot(a^2+a_1^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot e^{at}\cdot\cos(a_1 t + c_1 - \alpha) - \dfrac{ab+a_1b_1}{a^2+a_1^2} \\ y = c\cdot(a^2+a_1^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot e^{at}\cdot\sin(a_1 t + c_1 - \alpha) - \dfrac{ab_1-a_1b}{a^2+a_1^2}. \end{cases}$$

c und c_1 sind willkürliche Integrationskonstanten; da nun c sich nur in dem Ausdruck $c\cdot(a^2+a_1^2)^{-\frac{1}{2}}$, c_1 nur in $c_1 - \alpha$ findet, so kann man ohne Einschränkung der Allgemeinheit setzen

$$c\cdot(a^2+a_1^2)^{-\frac{1}{2}} = g, \qquad c_1 - \alpha = h,$$

wo g und h ganz willkürlich sind, und erhält dann

1)
$$\begin{cases} x = g\cdot e^{at}\cdot\cos(a_1 t + h) - \dfrac{ab+a_1b_1}{a^2+a_1^2} \\ y = g\cdot e^{at}\cdot\sin(a_1 t + h) - \dfrac{ab_1-a_1b}{a^2+a_1^2} \end{cases}$$

als allgemeinstes Bewegungsgesetz der z Ebene für $(f\,z) = (a+a_1 i)z + b + b_1 i$.

Die Gleichungen 1) enthalten 6 Konstanten, von denen 4 durch $f(z)$ gegeben, die beiden anderen Integrationskonstanten sind. Indem man denselben bestimmte Werte erteilt, erhält man folgende Einzelfälle.

a) $a = 0$

2) $$x = g\cdot e^{at}\cdot\cos h - \frac{b}{a}, \qquad y = g\cdot e^{at}\cdot\sin h - \frac{b_1}{a}$$

3) $$y = x\,\mathrm{tg}\,h + \frac{b\sin h - b_1\cos h}{a\cdot\cos h}.$$

Diese Gleichung umfasst alle Geraden der z Ebene. Ihr Richtungswinkel ist $\psi = \mathrm{arctg}\,h$, worin h Integrationskonstante, also völlig willkürlich ist. Die Integrationskonstante g fehlt in 3), sie bestimmt also nicht die Bahn, sondern nur das Bewegungsgesetz.

$$\frac{dx}{dt} = ag\cdot e^{at}\cos h, \qquad \frac{dy}{dt} = ag\cdot e^{at}\sin h, \qquad \frac{ds}{dt} = V = ag\cdot e^{at}$$

Beispiel: $Z = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$

$$u + vi = \frac{x}{2} \cdot \frac{x^2 + y^2 + 1}{x^2 + y^2} + i \cdot \frac{y}{2} \cdot \frac{x^2 + y^2 - 1}{x^2 + y^2}.$$

Die Kurven der z Ebene sind von höherem als zweitem Grade, Kegelschnitte erhält man, wenn man $b = b_1 = 0$ setzt. Dann ist nämlich

4) $$x = g \cdot e^{at} \cos h, \qquad y = g \cdot e^{at} \sin h, \qquad y = x \operatorname{tg} h$$

5) $$\begin{cases} u = \frac{x}{2} \cdot \frac{x^2 + \cos^2 h}{x^2} = \frac{x^2 + \cos^2 h}{2x} \\ v = \frac{x \cdot \operatorname{tg} h}{2} \cdot \frac{x^2 - \cos^2 h}{x^2} = \operatorname{tg} h \cdot \frac{x^2 - \cos^2 h}{2x} \end{cases}$$

oder wenn man jetzt $x = g \cdot e^{at} \cos h$ setzt,

6) $$u = \frac{\cos h}{2g} \cdot \frac{g^2 \cdot e^{2at} + 1}{e^{at}}, \qquad v = \frac{\sin h}{2g} \cdot \frac{g^2 \cdot e^{2at} - 1}{e^{at}}$$

7) $$\left(\frac{u}{\cos h}\right)^2 - \left(\frac{v}{\sin h}\right)^2 = 1.$$

Dies ist eine Schar konfokaler Hyperbeln, deren Mittelpunkt der Nullpunkt ist, deren Axen mit denen der Z Ebene zusammenfallen, deren Asymptoten die Linien $\frac{u}{\cos h} = \pm \frac{v}{\sin h}$ und deren Brennpunkte die Punkte $Z = \pm 1$ sind.

$$\frac{du}{dt} = \frac{a \cdot \cos h}{2g} \cdot \frac{g^2 \cdot e^{2at} - 1}{e^{at}},$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{a \sin h}{2g} \cdot \frac{g^2 \cdot e^{2at} + 1}{e^{at}}$$

8a) $$\operatorname{tg} \Phi = \frac{dv}{du} = \operatorname{tg} h \cdot \frac{g^2 \cdot e^{2at} + 1}{g^2 \cdot e^{2at} - 1} = \frac{u}{v}$$

8b) $$V_1 = \frac{a}{2g \cdot e^{at}} \sqrt{\left(g^2 e^{2at}\right)^2 - 2g^2 e^{2at} \cdot \cos 2h + 1}.$$

Es ist nun zu bilden $\zeta_1 = \frac{dZ}{dz} \cdot \frac{dz}{dt}$ (Voraussetzung $a_1 = b = b_1 = 0$).

$$\zeta_1 = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{z^2}\right) \cdot az = \frac{a}{2}\left(z - \frac{1}{z}\right)$$

$$\xi_1 + \eta_1 i = \frac{a}{2} \cdot \frac{x^2 - \cos^2 h}{x} + i \cdot \frac{atgh}{2} \cdot \frac{x^2 + \cos^2 h}{x}.$$

Setzt man jetzt $x = g \cdot e^{at} \cdot \cos h$, so erhält man:

9) $$\xi_1 + \eta_1 i = \frac{a \cos h}{2g} \cdot \frac{g^2 e^{2at} - 1}{e^{at}} + i \cdot \frac{a \sin h}{2g} \cdot \frac{g^2 \cdot e^{2at} + 1}{e^{at}}$$

10) $$\left(\frac{\eta_1}{a \sin h}\right)^2 - \left(\frac{\xi_1}{a \cos h}\right)^2 = 1.$$

Die Hodographen sind die Schar konfokaler Hyperbeln mit den Brennpunkten $\zeta_1 = \pm ai$ und den Asymptoten $\frac{\xi_1}{\cos h} = \pm \frac{\eta_1}{\sin h}$, sie haben also dieselben Asymptoten wie 7), liegen aber in den Nebenwinkeln.

Aus $\frac{x}{y} = tgh$, also $\frac{y}{\sin h} = \frac{x}{\cos h}$, folgt, dass die Bahn des Punktes z mit der einen Asymptote zusammenfällt; der Asymptotenwinkel ist $2h$.

Aus 9) folgt

11a) $$\frac{\eta_1}{\xi_1} = tgh \cdot \frac{g^2 \cdot e^{2at} + 1}{g^2 \cdot e^{2at} - 1} = tg\vartheta_1$$

11b) $$\sqrt{\eta_1^2 + \xi_1^2} =$$

$$\frac{g}{2g \cdot e^{at}} \cdot \sqrt{\left(g^2 e^{2at} - 1\right)^2 \cdot \cos^2 h + \left(g^2 e^{2at} + 1\right)^2 \sin^2 h} = \rho_1.$$

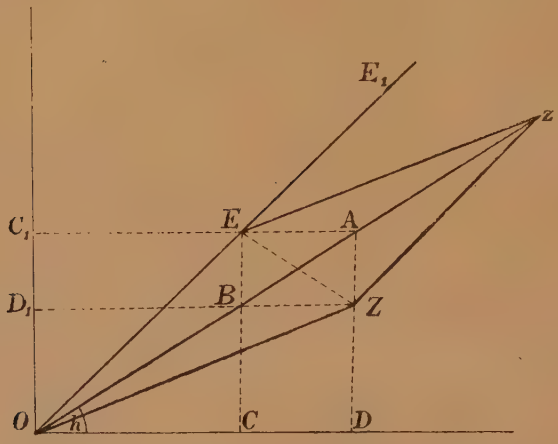
Aus 8) und 11) ergiebt sich demnach

$$\vartheta_1 = \Phi, \quad \rho_1 = V_1.$$

Aus 6) und 9) folgt

$$\frac{\xi_1}{a\cos h} = \frac{v}{\sin h}; \quad \frac{\eta_{i1}}{a\sin h} = \frac{u}{\cos h}$$

oder $\xi_1 = a \cdot v \cdot ctgh, \quad \eta_{i1} = a \cdot u \cdot tgh.$



Bedeutet nun in der vorstehenden Figur Z einen Punkt aus den Hyperbeln 7), so dass also $ZD = v$. $ZD_1 = u$ ist, so ergeben sich folgende Beziehungen:

$$v \cdot ctgh = OC, \quad u \cdot tgh = AD = OC_1;$$

folglich ist

$$\xi_1 + \eta_{i1} i = \zeta_1 = a(OC + OC_1 i).$$

Stehen also OE und OE_1 in dem Verhältnis $1 : a$, so ist E_1 der Punkt der ζ_1 Ebene, der z (Z) entspricht. Ist $a = 1$, so ist E ein Punkt der Hyperbel $\left(\frac{\eta_{i1}}{\sin h}\right)^2 - \left(\frac{\xi_1}{\cos h}\right)^2 = 1$, d. h. für $a = 1$ sind die beiden Hyperbelscharen konjugiert.

Die Konstante a findet sich nicht in der Gleichung 7), wohl aber in 6). Lässt man also die Bewegung des Punktes Z, der die Hyperbeln 7) durchläuft, verschiedenen Werten von a entsprechen, so werden die Hodographen für diese verschiedenen Bewegungen durch ähnliche und ähnlich gelegene Hyperbeln dargestellt, die dieselben Asymptoten

haben wie 7), als Brennpunkte aber $\zeta_1 = \pm ai$. Die verschiedenen diesen Bewegungen entsprechenden Punkte ζ_1 liegen für gleiche Werte von t auf einer durch O gehenden Geraden.

Aus

$$au + \xi_1 = ag \cdot \cos h \cdot e^{at} = ax$$

und

$$av + \eta_{11} = ag \cdot \sin h \cdot e^{at} = ay$$

folgt

$$aZ + \zeta_1 = az$$

für $a = 1$ sind also Z, ζ, z, O die Ecken eines Parallelogramms.

Da ferner

$$\frac{d\xi_1}{dt} = au, \quad \frac{d\eta_{11}}{dt} = av, \text{ also}$$

$$\sqrt{\left(\frac{d\xi_1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\eta_{11}}{dt}\right)^2} = a\sqrt{u^2 + v^2}$$

ausserdem $\frac{d\eta_{11}}{d\xi_1} = \frac{v}{u}$ ist, so stellt für $a = 1$ EZ die Richtung und Grösse der Geschwindigkeit des Punktes ζ_1 dar, für $a = 1$ ist daher $f_3(\xi\eta) = 0$ Hodograph für $f_1(uv) = 0$ und zugleich auch $f_1 = 0$ Hodograph für $f_3 = 0$.

Das Ergebnis ist also folgendes:

Bewegt sich z in einer Geraden $y = \pm x \cdot tgh$ mit der Geschwindigkeit $V = g \cdot e^{t}$, so bewegen sich Z und ζ_1 auf 2 konjugierten Hyperbeln (deren Asymptoten die genannten Geraden sind) derart, dass ihre Verbindungslinien mit z Tangenten sind. — Bewegt sich der Punkt z mit der Geschwindigkeit $V = a \cdot g \cdot e^{at}$, so ist der Hodograph des Punktes Z eine Hyperbel, die der 7) konjugierten ähnlich und ähnlich gelegen ist und die die Brennpunkte $\zeta_1 = \pm ai$ hat.

Nebenbei kann man aus diesen Beziehungen auf sehr einfache Art eine Reihe bekannter Sätze ableiten, z. B.:

1. Legt man von einem Punkte z einer Asymptote zweier konjugierter Hyperbeln an dieselben Tangenten, so bilden die Berührungspunkte mit O und z ein Parallelogramm.
2. Die Verbindungslinie beider Berührungspunkte wird durch die eine Asymptote halbiert und ist der anderen parallel.
3. Eine von beiden Asymptoten begrenzte Tangente einer Hyperbel wird im Berührungspunkte halbiert.

$$b \cdot) \qquad a = 0.$$

Aus den Gleichungen 1) dieses Paragraphen folgt

$$12) \qquad x = g \cdot \cos(a_1 t + h) - \frac{b_1}{a_1}, \qquad y = g \sin(a_1 t + h) + \frac{b}{a_1}$$

$$13) \qquad \left(x + \frac{b_1}{a_1}\right)^2 + \left(y - \frac{b}{a_1}\right)^2 = g^2$$

$$\frac{dx}{dt} = -a_1 g \cdot \sin(a_1 t + h),$$

$$\frac{dy}{dt} = a_1 g \cos(a_1 t + h), \qquad V = \frac{ds}{dt} = a_1 g.$$

z bewegt sich in einem Kreise mit gleichförmiger Geschwindigkeit.

Die Bahngleichung enthält 3 willkürliche Konstanten $\frac{b_1}{a_1}$, $\frac{b}{a_1}$, g, so dass also sowohl die Lage als auch der Radius des Kreises völlig unbestimmt sind; die Integrationskonstante h tritt nur im Bewegungsgesetz auf.

Die Ebene des Hodographen ist gegeben durch die Gleichung:

$$\zeta_1 = \frac{dF(z)}{dz}(a_1 z i + b + b_1 i)$$

Dieselbe enthält 3 Konstanten, welche die Lage des Mittelpunktes, aber nicht den Radius bestimmen.

Beispiel: $Z = 1 + z + lgz.$

Es soll aus allen Kreisen 13) die Schar der konzentrischen Kreise um den Nullpunkt gewählt werden, man setzt demnach $b = b_1 = 0$, $a_1 = 1$. Die Bewegung soll beginnen in der Lage $z = g$, es ist also zu setzen $h = 0$. Für g wird wieder der ursprüngliche Wert e^c genommen. (Vergleiche § 8, 1)

14) $x = e^c \cos t, \quad y = e^c \sin t, \quad x^2 + y^2 = e^{2c}$

15) $u = 1 + c + e^c \cos t, \quad v = t + e^c \sin t$

für $c = 0$ stellt 15) eine einfache, für $c > 0$ verschlungene, für $c < 0$ gedehnte Cykloiden dar; der erzeugende Kreis rollt auf der Geraden $u = c$ und hat den Radius 1, der Abstand des erzeugenden Punktes vom Mittelpunkte ist e^c.

Die Ebene des Hodographen ist

$$\zeta_1 = \frac{dZ}{dz} \cdot z \cdot i = (x + 1)i - y,$$

$$\xi_1 = -y = -e^c \sin t, \quad \eta_1 = 1 + x = 1 + e^c \cos t,$$

16) $$\xi_1^2 + (\eta_1 - 1)^2 = e^{2c}.$$

Die Hodographenschar 16) ist also der Kreisschar 14) kongruent und hat den Punkt $\zeta_1 = +i$ zum Mittelpunkte; die Bewegung des Punktes ζ_1 ist eine gleichförmige, der Radius des Hodographen für eine Cykloide der Schar 15) ist gleich dem Radius des erzeugenden Punktes.

Die Geschwindigkeit und Richtung des Punktes Z sind gegeben durch die Gleichungen:

$$V_1 = \sqrt{\xi_1^2 + \eta_1^2} = \sqrt{1 + 2e^c \cos t + e^{2c}}$$

$$tg\Phi = \frac{\eta_1}{\xi_1} = \frac{1 + e^c \cos t}{-e^c \sin t}.$$

Trägt man t als Ordinate auf der Grundlinie des rollenden Kreises, also auf $u = c$ ab, so ist, da t auch den Wälzungswinkel bedeutet, der Ort von t zugleich der Berührungspunkt des rollenden Kreises für den Wert von Z, der $t = t_1$ entspricht. (Nebenbei lässt sich hieraus der bekannte Satz ableiten, dass die Verbindungslinie eines Punktes der Cykloide mit dem entsprechenden Berührungspunkte des Rollkreises und der Grundlinie Normale der Cykloide ist.)

Es soll nun eine neue Ebene $\tau = c + ti$ eingeführt und z, Z und ζ_1 als Funktionen von τ dargestellt werden.

Aus 14) folgt

$$x + yi = e^c (\cos t + i \sin t) = e^{c+ti} = e^\tau, \text{ also } z_0 = e^\tau$$

$$Z_0 = 1 + \tau + e^\tau, \quad \zeta_0 = \left(1 + \frac{1}{z}\right) \cdot zi = (1 + e^\tau)i.$$

Da nun Z_0 und Z, ebenso ζ_0 und ζ_1 identisch sind, so folgt, dass die Abbildung der Kreise 14) durch Z und ζ_1 dieselben Kurvenscharen liefert wie die Abbildung der Geraden $\tau = c$ auf Z_0 und ζ_0, d. h. also, auf die ursprüngliche Bezeichnung übertragen, die Geraden $x = c$ der z Ebene werden durch die Abbildung $Z = 1 + z + e^z$ auf denselben Kurven abgebildet wie die konzentrische Kreisschar um den Nullpunkt durch $Z = 1 + z + lgz$, und dem entsprechend sind auch die Beziehungen zwischen den Hodographen.

Die Funktion $Z = 1 + z + e^z$ ist bereits als Beispiel in § 5 behandelt worden; zwischen beiden Funktionen $Z = 1 + z + e^z$ und $Z = 1 + z + lgz$ lassen

sich noch andere Beziehungen herstellen, auf welche aber an dieser Stelle nicht weiter eingegangen werden kann.

c). $b = b_1 = 0, \quad h = 0.$

17) $$x = g \cdot e^{at} \cos a_1 t, \qquad y = g \cdot e^{at} \sin a_1 t,$$

$$x^2 + y^2 = R^2 = g^2 e^{2at}, \qquad \frac{y}{x} = tg\psi = tg a_1 t.$$

18) $$\psi = \frac{a_1}{a} lg \frac{R}{g}$$

18) stellt alle logarithmischen Spiralen dar, deren Mittelpunkt der Nullpunkt ist und deren Axen mit der reellen Axe zusammenfallen. Das Bewegungsgesetz enthält 3 willkürliche Konstanten, die Bahngleichung deren 2, $\frac{a_1}{a}$ und g, und zwar bezeichnet g den Anfangsradius für ψ (oder t) gleich 0, und $\frac{a_1}{a}$ bestimmt den Exponenten der geometrischen Progression, in welcher die Radien stehen. Giebt man einer der beiden Konstanten $\frac{a_1}{a}$ oder g einen bestimmten Wert, so bedeutet 2) eine Schar logarithmischer Spiralen.

Die Bahngeschwindigkeit ist $\frac{ds}{dt} = g \cdot e^{at} \sqrt{a^2 + a_1^2}$, die Winkelgeschwindigkeit des Radius Vektor ist, wie aus $\psi = a_1 t$ folgt, konstant.

Beispiel: $$Z = (1 + lgz) \cdot lgz.$$

Da $$lgz = lg \sqrt{x^2 + y^2} + i \cdot arctg \frac{y}{x} = lgR + i \cdot \psi$$

ist, so folgt

$$Z = lgR + lg^2 R - \psi^2 + i(\psi + 2\psi lgR)$$

oder, da

$$R = g \cdot e^{at}, \quad lgR = at + lgg \text{ und } \psi = a_1 t \text{ ist,}$$

$$u = at + lgg + (at + lgg)^2 - a_1{}^2t^2, \quad v = a_1t + 2a_1t(at + lgg)$$

19a) $$u = (a^2 - a_1{}^2)t^2 + a(1 + 2lgg)t + lgg(1 + lgg),$$

19b) $$v = 2aa_1t^2 + a_1(1 + 2lgg)t.$$

Die Gleichungen 19) stellen Scharen von Parabeln dar, die nach dem Wurfgesetz beschrieben werden; die logarithmischen Spiralen 18) werden also durch $Z = (1 + lgz)lgz$ auf Parabeln abgebildet, deren Hodographen gerade Linien sein müssen.

Die Richtung der Bewegung ergiebt sich aus

20a) $$tg\Phi = \frac{dv}{dt} : \frac{du}{dt}$$

$$= [4aa_1t + a_1(1 + 2lgg)] : [2(a^2 - a_1{}^2)t + a(1 + 2lgg)]$$

die Grösse der Geschwindigkeit aus:

20b) $$V_1 = \sqrt{\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dv}{dt}\right)^2}$$

$$= \sqrt{(a^2 + a_1{}^2)[4(a^2 + a_1{}^2)t^2 + 4a(1 + 2lgg)t + (1 + 2lgg)^2]}.$$

Für $a_1 = 0$ geht dieser Ausdruck über in

$$V_1 = a(2at + 1 + 2lgg),$$

für $a = 0$ in

$$V_1 = a_1\sqrt{4a_1{}^2t^2 + (1 + 2lgg)^2}$$

[vergl. § 8 a) und b), in denen man für $b = b_1 = 0$ dasselbe erhält].

Die Hodographenebene ist

$$\zeta_1 = \frac{dZ}{dz}(a + a_1i)z.$$

21) $$\zeta_1 = \left(\frac{1}{z} + \frac{2}{z}lgz\right)(a + a_1i)z = (1 + 2lgz)(a + a_1i)$$

$$= (1 + 2lgz) \cdot \left\{\frac{a}{\sqrt{a^2 + a_1{}^2}} + \frac{a_1i}{\sqrt{a^2 + a_1{}^2}}\right\}\sqrt{a^2 + a_1{}^2}.$$

Die ζ_1 Ebene entsteht also aus der Ebene $z_1 = 1 + 2lgz$ durch eine Abbildung der Aehnlichkeit; sie ist gegen die z_1 Ebene um den Winkel $\alpha = arctg\frac{a_1}{a}$ gedreht und im Verhältnis $\rho = \sqrt{a^2 + a_1{}^2}$ vergrössert.

Schreibt man z_1 in der Form

$$x_1 + y_1 i = 1 + 2lgR + 2\psi i,$$

so sieht man sofort, dass die Hodographen der ζ_1 Ebene, die ja den logarithmischen Spiralen der z Ebene $\psi = \frac{a_1}{a} lg \frac{R}{g}$ entsprechen, durch lineare Beziehungen zwischen x_1 und y_1 ausgedrückt werden, also Geraden sind; die Gleichungen derselben ergeben sich aus 21):

$$\zeta_1 = \alpha + 2algR - 2a_1\psi + i(a_1 + 2a_1 lgR + 2a\psi),$$

22a) $\xi_1 = a + 2a^2t + 2algg - 2a_1{}^2t = 2(a^2 - a_1{}^2)t + a(1 + 2lgg)$

22b) $\eta_{11} = a_1 + 2aa_1t + 2a_1lgg + 2aa_1t = 4aa_1t + a_1(1 + 2lgg)$

23) $2aa_1\xi_1 - (a^2 - a_1{}^2)\eta_{11} = a_1(a^2 + a_1{}^2)(1 + 2lgg)$

Aus 22) und 20) ergiebt sich

$$\eta_{11} = \frac{dv}{dt}, \quad \xi_1 = \frac{du}{dt}.$$

Aus der Schar 23) sollen diejenigen Hodographen herausgenommen werden, welche durch den Nullpunkt gehen, deren Gleichung also ist

24) $2aa_1\xi_1 = (a^2 - a_1{}^2)\eta_{11}.$

Alle Radien $0\zeta_1$ haben dieselbe oder entgegengesetzte Richtung, dasselbe ist der Fall bei den Tangenten der entsprechenden Kurven $f_1(uv) = 0$, letztere sind also Geraden, die zu 24) parallel sind.

Die Beziehung 24) findet nur dann statt, wenn $a_1 = 0$ oder wenn $1 + 2lgg = 0$ ist. Dem ersten Fall entsprechen die Gleichungen:

$$\xi_1 = 2a^2t + a(1 + 2lgg), \quad \eta_{11} = 0;$$
$$u = a^2t^2 + a(1 + 2lgg), \quad v = 0;$$
$$x = g \cdot e^{at}, \quad y = 0.$$

Es sind die reellen Axen der 3 Ebenen.

Wenn $1 + 2lgg = 0$ ist, so bestehen die Gleichungen:

$$x = e^{at - \frac{1}{2}} \cdot \cos a_1 t, \qquad y = e^{at - \frac{1}{2}} \cdot \sin a_1 t$$

$$u = (a^2 - a_1^2)t^2 - \frac{1}{4}, \qquad v = 2aa_1t^2$$

also $$2aa_1u - (a^2 - a_1^2)v = \frac{-aa_1}{2}.$$

Diese Geraden sind in der That den Hodographen 24) parallel. Aus $V_1 = 2t(a^2 + a_1^2)$ folgt, dass Z sich in diesen Geraden mit gleichmässiger Beschleunigung bewegt.

d) Allgemeiner Fall $\frac{dz}{dt} = (a + a_1 i)z + b + b_1 i.$

25a) $$x = g \cdot e^{at} \cos(a_1 t + h) - \frac{ab + a_1 b_1}{a^2 + a_1^2}$$

25b) $$y = g \cdot e^{at} \sin(a_1 t + h) - \frac{ab_1 - a_1 b}{a^2 + a_1^2}$$

(vergl. § 8, Gl. 1).

Aus diesen Gleichungen ergeben sich unmittelbar die folgenden:

26a) $$\left(x + \frac{ab + a_1 b_1}{a^2 + a_1^2}\right)^2 + \left(y + \frac{ab_1 - a_1 b}{a^2 + a_1^2}\right)^2 = g^2 e^{2at}$$

26b) $$\left(y + \frac{ab_1 - a_1 b}{a^2 + a_1^2}\right) : \left(x + \frac{ab + a_1 b_1}{a^2 + a_1^2}\right) = tg(a_1 t + h).$$

Bezeichnet nun r den Radius Vektor vom Punkte z nach

$$z_0 = -\frac{ab + a_1 b_1}{a^2 + a_1^2} - i \cdot \frac{ab_1 - a_1 b}{a^2 + a_1^2},$$

und τ den Winkel, welchen zz_0 mit der Linie $y = xtgh$ bildet (also $\tau + h$ den Winkel des Radius Vektor zz_0 mit der reellen Axe), so geht 26) über in

27) $$r = g \cdot e^{at}, \quad tg(\tau + h) = tg(a_1 t + h),$$

28) $$\tau = \frac{a_1}{a} lg \frac{r}{g}$$

Dies ist die Gleichung einer logarithmischen Spirale, und zwar begreift 28) alle logarithmischen Spiralen der z Ebene in sich, denn der Winkel h, den die Axe der Spirale mit der reellen Axe bildet,

ist willkürliche Integrationskonstante, zur Bestimmung der Lage des Mittelpunktes und zur Bestimmung des Exponenten der Progression dienen die 4 Konstanten $a\ a_1\ b\ b_1$, endlich die Grösse des Radius Vektor in der Anfangslage, g, ist Integrationskonstante. Es ist also noch eine Konstante übrig, welche den willkürlichen Parameter des Bewegungsgesetzes darstellt. — Da $\tau = a_1 t$, also $\frac{d\tau}{dt} = a_1$ ist, so bewegt sich der Radius Vektor, der vom Mittelpunkt einer Spirale nach einem die Spirale durchlaufenden Punkt gezogen ist, mit gleichmässiger Winkelgeschwindigkeit a_1, die willkürlich angenommen werden kann.

Das Ergebnis der Untersuchung dieses Paragraphen lässt sich in folgenden Sätzen zusammenfassen:

1) Ein Punkt bewegt sich in einer beliebigen und beliebig gelegenen logarithmischen Spirale der z Ebene so, dass der Radius vom Mittelpunkt der Spirale in gleichen Zeiten gleiche Winkel beschreibt. Bildet man nun die Spirale durch eine beliebige Funktion $Z = F(z)$ auf der Kurve $f_1(uv) = 0$ und durch

$$\zeta_1 = \frac{dZ}{dz}\left((a + a_1 i)z + b + b_1 i\right)$$

auf der Kurve $f_3(\xi_1 \eta_1) = 0$ ab, so lassen sich die Konstanten $a\ a_1\ b\ b_1$ stets so bestimmen, dass $f_3 = 0$ Hodograph der Bewegung $f_1 = 0$ wird.

Da die logarithmische Spirale den Kreis und die Gerade als besondere Fälle in sich begreift (setzt man nämlich $a_1 = 0$, so stellt 25) eine Gerade dar, die mit der Bahn-

geschwindigkeit $V = m \cdot e^{at}$ durchlaufen wird, und setzt man $a = 0$, so bezeichnet 25) Kreise, die mit gleichförmiger Geschwindigkeit beschrieben werden) — so folgen hieraus noch die Sätze:

2) Bewegt sich z geradlinig mit der Geschwindigkeit $V = m \cdot e^{at}$, und bildet man die Bewegung durch eine beliebige Funktion $Z = F(z)$ auf $f_1(uv) = 0$, ferner durch $\zeta_1 = \frac{dZ}{dz}(az + b + b_1 i)$ auf $f_3(\xi_1 \eta_1) = 0$ ab, so lassen sich die Konstanten $a\ b\ b_1$ stets so bestimmen, dass $f_3 = 0$ Hodograph der Bewegung $f_1 = 0$ wird.

3) Bewegt sich z in einem beliebigen Kreise mit gleichmässiger Geschwindigkeit, und bildet man den Kreis durch eine beliebige Funktion $Z = F(z)$ auf $f_1(uv) = 0$, ferner durch $\zeta_1 = \frac{dZ}{dz}(a_1 iz + b + b_1 i)$ auf $f_3(\xi_1 \eta_1) = 0$ ab, so kann man stets die Konstanten $a_1\ b\ b_1$, ferner die Koordinaten $u\ v\ \xi_1\ \eta_1$ als Funktionen der Zeit so bestimmen, dass $f_3 = 0$ Hodograph der Bewegung $f_1 = 0$ wird.

§ 9. § 9. $f(z) = \frac{dz}{dt} = \frac{1}{(a + a_1 i) z + b + b_1 i}$.

Aus der Gleichung $\int [(a + a_1 i) z + b + b_1 i]\, dz = dt$ folgt

$$\frac{a + a_1 i}{2} z^2 + (b + b_1 i) z = t + c + c_1 i$$

1)
$$\left|\begin{array}{l} \frac{a}{2}(x^2 - y^2) - a_1 xy + bx - b_1 y = t + c \\ \frac{a_1}{2}(x^2 - y^2) + axy + b_1 x + by = c_1. \end{array}\right.$$

In expliciter Form haben x und y die Werte:

$$2) \quad \begin{cases} x = \frac{1}{a^2 + a_1^2}\left(f \pm (a\sqrt{p} + a_1\sqrt{q})\right) \\ y = \frac{1}{a^2 + a_1^2}\left(g \pm (a\sqrt{q} - a_1\sqrt{p})\right), \end{cases}$$

worin für $f\ g\ p\ q$ folgende Werte zu setzen sind:

$$f = -ab - a_1 b_1$$
$$g = -ab_1 + a_1 b$$
$$p = \frac{1}{2}(r + \sqrt{r^2 + s^2})$$
$$q = \frac{1}{2}(-r + \sqrt{r^2 + s^2})$$
$$r = 2at + (b^2 - b_1^2 + 2ac - 2a_1 c_1)$$
$$s = 2a_1 t + (2bb_1 + 2ac_1 + 2a_1 c).$$

Im Folgenden sollen die Gleichungen 1) zu Grunde gelegt werden; sie stellen das allgemeinste Bewegungsgesetz dar, welches durch die vorgelegte Bedingungsgleichung geliefert wird.

1b) ist die Bahngleichung, welche demnach einen beliebigen Kegelschnitt der z Ebene vorstellt. Die Konstante c_1 bestimmt nur die Bahn, c nur die Bewegungsart. Giebt man nun den Konstanten aa_1bb_1 bestimmte Werte, so stellt 1b) eine Schar von Kegelschnitten dar, deren jeder von einem Punkte so durchlaufen wird, dass alle Punkte in demselben Augenblick in einem und demselben Kegelschnitt aus der Schar 1a) liegen. Wenn auch c sich ändert, so stellt 1a) eine Schar von Bewegungsgesetzen dar, zugleich aber auch eine Schar von Kegelschnitten, sobald man t einen bestimmten Wert erteilt. Die beiden Scharen 1a) und 1b) sind orthogonal, es ist nämlich, wenn man in 1b) statt x und y ξ und η setzt:

$$ax - ay\frac{dy}{dx} - a_1 y - a_1 x\frac{dy}{dx} + b - b_1\frac{dy}{dx} = 0$$

$$a_1\xi - a_1\eta_1\frac{d\eta_1}{d\xi} + a\eta_1 + a\xi\frac{d\eta_1}{d\xi} + b_1 + b\frac{d\eta_1}{d\xi} = 0$$

$$(a_1 x + ay + b_1)\frac{dy}{dx} - (ax - a_1 y - b) = 0$$

$$(a\xi + a_1\eta_1 + b)\frac{d\eta_1}{d\xi} + (a_1\xi + a\eta_1 + b_1) = 0$$

also
$$\frac{dy}{dx}\cdot\frac{d\eta_1}{d\xi} + 1 = 0.$$

Es sollen jetzt einzelne Fälle erörtert werden.

$$a_1 = b = b_1 = 0$$

3) $x^2 - y^2 = \frac{2}{a}(t + c)$ Bewegungsgleichung

4) $xy = \frac{c_1}{a}$ Bahngleichung

5) $\zeta_1 = \frac{dZ}{dz}\cdot\frac{1}{az}$ Hodographenebene.

Die einfachsten Beziehungen liefern diejenigen Abbildfunktionen Z, deren Differentialquotient $\frac{dZ}{dz}$ durch z teilbar ist.

Die Darstellung der Bewegung in Z und ihres Hodographen soll an dem Beispiel $Z = z^8$ durchgeführt werden.

Beispiel: $Z = z^8$.

6)
$$\begin{aligned} u &= x^8 - \binom{8}{2}x^6y^2 + \binom{8}{4}x^4y^4 - \binom{8}{6}x^2y^6 + y^8 \\ v &= \binom{8}{1}x^7y - \binom{8}{3}x^5y^3 + \binom{8}{5}x^3y^5 - \binom{8}{7}xy^7 \\ u &= (x^2 - y^2)^4 - 24\,x^2y^2(x^2 - y^2)^2 + 16\,x^4y^4 \\ v &= 8\,xy(x^2 - y^2)^3 - 32\,x^3y^3(x^2 - y^2). \end{aligned}$$

Setzt man jetzt aus 3) und 4) die Werte für $x^2 - y^2$ und für xy ein, so erhält man

7)
$$\begin{aligned} u &= \frac{16}{a^4}[(t + c)^4 - 6c_1{}^2(t + c)^2 + c_1{}^4] \\ v &= \frac{64}{a^4}[c_1(t + c)^3 + c_1{}^3(t + c)] \end{aligned}$$

7) stellt die Abbildung der Bewegung 3) und 4) in Z dar. Die Ebene des Hodographen ist gegeben durch die Gleichung

$$\zeta_1 - \frac{dZ}{dz} \cdot \frac{1}{az} = \frac{8}{a} z^6$$

8)
$$\left|\begin{array}{l} \frac{a}{8}\xi_1 = x^6 - \binom{6}{2} x^4y^2 + \binom{6}{4} x^2y^4 - y^6 \\ \frac{a}{8}\eta_1 = \binom{6}{1} x^5y - \binom{6}{3} x^3y^3 + \binom{6}{5} xy^5 \end{array}\right.$$

9)
$$\left|\begin{array}{l} \xi_1 = \frac{64}{a^4}[(t+c)^3 - 3c_1{}^2(t+c)] \\ \eta_1 = \frac{64}{a^4}[3c_1(t+c)^2 + c_1{}^3]. \end{array}\right.$$

Aus den Gleichungen 7) und 9) ersieht man, dass $\frac{du}{dt} = \xi_1$, $\frac{dv}{dt} = \eta_1$, dass also in der That 9) die Gleichung des Hodographen für die in 5) ausgesprochene Bewegung ist. x und y sind irrationale Funktionen von t, u v ξ_1 η_1 dagegen rationale, und zwar u und v vom vierten bez. dritten, ξ_1 η_1 vom dritten bez. zweiten Grade in t.

Dieses Verfahren kann nun allgemein auf alle Abbildfunktionen von der Form $Z = z^{2n}$ angewendet werden. Es ist nämlich:

$$Z = (x+yi)^{2n} = [(x+yi)^2]^n = (x^2 - y^2 + 2xyi)^n$$
$$= \left(\frac{2}{a}\right)^n \cdot [(t+c) + c_1 i]^n$$

$$\zeta_1 - \frac{2nz^{2n-1}}{az} = \frac{2n}{a}(z^2)^{n-1} = n \cdot \left(\frac{2}{a}\right)^n \cdot [(t+c) + c_1 i]^{n-1}$$

u v ξ_1 η_1 sind demnach ganze rationale Funktionen von t, und zwar ist der Grad von u um 1 höher als der von v und ξ_1, und um 2 höher als der von η_1.

Eine Anwendung dieses Verfahrens auf die Abbildung $Z = z^4$ muss nach dem oben aufgestellten

Bewegungsgesetze Kegelschnitte liefern, deren Hodographen gerade Linien sind.

1 Beispiel: $Z = z^4 = (x^2 - y^2 + 2xyi)^2$

10) $$u = \frac{4}{a^2}(t+c)^2 - \frac{4}{a^2}c_1^2; \qquad v = \frac{8}{a^2}c_1(t+c)$$

11) Bahngleichung $$v^2 = 2 \cdot \frac{8c_1^2}{a^2}u + \left(\frac{8c_1^2}{a^2}\right)^2$$

11) stellt eine Schar von Parabeln dar, deren Brennpunkte im Nullpunkte liegen, deren Axen mit der reellen Axe zusammenfallen, und deren Parameter gleich $2 \cdot \frac{8c_1^2}{a^2}$ sind. Die Bewegung erfolgt nach dem Wurfgesetz.

12) $$\zeta_1 = 4z^3 \cdot \frac{1}{az} = \frac{8}{a^2}(t+c) + i \cdot \frac{8}{a^2}c_1.$$

Die Hodographen sind also in der That Geraden.

Dies Bewegungsgesetz lässt sich auf die allgemeinste Form der Wurfbewegung ausdehnen durch die folgende Abbildung.

2 Beispiel. $Z = (p + p_1 i)z^4 + (q + q_1 i)z^2 + r + r_1 i$

$$u = p(x^2 - y^2)^2 - 4px^2y^2 - 4p_1(x^2 - y^2)xy + q(x^2 - y^2) - 2q_1xy + r$$

$$v = p_1(x^2 - y^2)^2 + 4p_1x^2y^2 + 4p(x^2 - y^2)xy + q_1(x^2 - y^2) + 2qxy + r_1$$

$$u = \frac{4p}{a^2}(t+c)^2 - \left(\frac{8p_1c_1}{a^2} - \frac{2q}{a}\right)(t+c) - \frac{4pc_1^2}{a^2} - \frac{2q_1c_1}{a} + r$$

$$v = \frac{4p_1}{a^2}(t+c)^2 + \left(\frac{8pc_1}{a^2} + \frac{2q_1}{a}\right)(t+c) + \frac{4p_1c_1^2}{a^2} + \frac{2qc_1}{a} + r_1.$$

Die Hodographenebene ist

$$\zeta_1 = \frac{4}{a}(p + p_1 i)z^2 + \frac{2}{a}(q + q_1 i)$$

$$\xi_1 = \frac{4p}{a}(x^2 - y^2) - \frac{8p_1}{a}xy + \frac{2q}{a} = \frac{8p}{a^2}(t+c) - \frac{8p_1c_1}{a^2} + \frac{2q}{a}$$

$$\eta_1 = \frac{4p_1}{a}(x^2 - y^2) + \frac{8p}{a}xy + \frac{2q_1}{a} = \frac{8p_1}{a^2}(t+c) + \frac{8pc_1}{a^2} + \frac{2q_1}{a}.$$

§ 10. $f(z) = (a + a_1 i)z^2 + (b + b_1 i)z + c + c_1 i$ § 10.

$$\int \frac{dz}{(a + a_1 i)z^2 + (b + b_1 i)z + c + c_1 i} = t + d + d_1 i$$

1) $$\frac{2}{\sqrt{4(a + a_1 i)(c + c_1 i) - (b + b_1 i)^2}} \cdot arctg \frac{2(a + a_1 i)z + b + b_1 i}{\sqrt{4(a + a_1 i)(c + c_1 i) - (b + b_1 i)^2}} = t + d + d_1 i$$

daraus folgt

2) $$z = \frac{p\, sin(f + f_1 t) - p_1\, \mathfrak{Sin}\,(g + g_1 t)}{cos(f + f_1 t) + \mathfrak{Cos}\,(g + g_1 t)} + q + i\left[\frac{p_1 sin(f + f_1 t) + p\, \mathfrak{Sin}\,(g + g_1 t)}{cos(f + f_1 t) + \mathfrak{Cos}\,(g + g_1 t)} + q_1\right]$$

die $f\ g\ p\ q$ sind reelle Konstanten, die sich aus den Konstanten $a\ b\ c\ d$ berechnen lassen.

Die aus 2) sich ergebenden Bewegungsgleichungen sind jedoch so verwickelt, dass sie nur in besonderen Fällen einigermassen brauchbare Anwendungen gestatten, es sollen daher sofort Einzelfälle untersucht werden.

a) $b = b_1 = c = c_1 = 0$

$$f(z) = (a + a_1 i)z^2, \qquad \frac{dz}{z^2} = (a + a_1 i)dt$$

$$-\frac{1}{z} = (a + a_1 i)t + b + b_1 i$$

3) $$\frac{-x}{x^2 + y^2} = at + b, \qquad \frac{y}{x^2 + y^2} = a_1 t + b_1$$

4) $$\begin{aligned} x &= -(at + b) : [(at + b)^2 + (a_1 t + b_1)^2] = -T : (T^2 + T_1{}^2) \\ y &= (a_1 t + b_1) : [(at + b)^2 + (a_1 t + b_1)^2] = T_1 : (T^2 + T_1{}^2) \end{aligned}$$

5) $$\left(x - \frac{a_1}{2(ab_1 - a_1 b)}\right)^2 + \left(y - \frac{a}{2(ab_1 - a_1 b)}\right)^2 = \frac{a^2 + a_1{}^2}{4(ab_1 - a_1 b)^2}$$

5) stellt alle Kreise der z Ebene dar, die durch den Nullpunkt gehen. — 4) liefert das Bewegungs-

gesetz, welches auch in anderer Form geschrieben werden kann. Nennt man nämlich den Winkel, den der Radius vom Nullpunkt nach z mit der reellen Axe bildet ψ, so ist

$$tg\psi = -\frac{a_1 t + b_1}{at + b} = -T : T_1$$

$$\frac{d\psi}{dt} = (a_1 b - a b_1) : (T^2 + T_1{}^2)$$

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{a^2 + a_1{}^2} : (T^2 + T_1{}^2)$$

Das Bewegungsgesetz kann also auch die Form erhalten

$$\frac{d\psi}{dt} : \frac{ds}{dt} = (a_1 b - a b_1) : \sqrt{a^2 + a_1{}^2}$$

Es sollen jetzt noch weitere beschränkende Annahmen gemacht werden.

1) $a_1 = b = b_1 = 0$, $\quad f(z) = az^2$

$x = -\frac{1}{at}$ Bewegungsgleichung

$y = 0$ Bahngleichung.

Beispiel: $\quad Z = zi + \frac{1}{z}$

$$u = [-y(x^2 + y^2) + x] : (x^2 + y^2) = \frac{1}{x} = -at$$

$$v = [x(x^2 + y^2) - y] : (x^2 + y^2) = x = -\frac{1}{at}$$

Die Bahngleichung ist $uv = 1$ (gleichseitige Hyperbel).

$$\zeta_1 = \left(i - \frac{1}{z^2}\right) \cdot az^2 = aiz^2 - a$$

$$\xi_1 = -2axy - a = -a = \frac{du}{dt}$$

$$\eta_1 = a(x^2 - y^2) = \frac{1}{at^2} = \frac{dv}{dt}$$

Hodographen sind die Geraden $\xi_1 = -a$.

2) $a = b = b_1 = 0$, $\quad f(z) = a_1 i z^2$

$y = \frac{1}{a_1 t}$ Bewegungsgleichung

$x = 0$ Bahngleichung.

Beispiel: $\quad Z = 1 + z + lgz.$

$$u = 1 + x + lg\sqrt{x^2 + y^2} = 1 + lg\frac{1}{a_1 t}$$

$$v = y + arctg\frac{y}{x} = \frac{1}{a_1 t} + \frac{2n+1}{2}\pi$$

$r = e^{u-1} + \frac{2n+1}{2}\pi$ Bahngleichung (logarithmische Linien).

$$\zeta_1 = \left(1 + \frac{1}{z}\right) a_1 i z^2 = a_1 i(z + z^2)$$

$$\xi_1 = -2a_1 xy - a_1 y = \frac{-1}{t} = \frac{du}{dt}$$

$$\eta_1 = a_1(x^2 - y^2) + a_1 x = \frac{-1}{a_1 t^2} = \frac{dv}{dt}$$

Hodographen sind die Parabeln $\eta_1 + a_1 \xi_1^2 = 0$.

3) $\quad b = b_1 = 0$, $\quad f(z) = (a + a_1 i) z^2$

$$x = \frac{-a}{a^2 + a_1^2} \cdot \frac{1}{t}, \qquad y = \frac{a_1}{a^2 + a_1^2} \cdot \frac{1}{t}$$

$a_1 x + ay = 0$ Bahngleichung.

Beispiel:

$$Z = \frac{1}{z} lgz = \frac{x - yi}{x^2 + y^2}\left((lg\sqrt{x^2 + y^2} + iarctg\frac{y}{x}\right)$$

$$u = \frac{xlg\sqrt{x^2 + y^2} + yarctg\, y/x}{x^2 + y^2} = t \cdot \left(algt + alg\sqrt{a^2 + a_1^2} + a_1 arctg\frac{-a_1}{a}\right)$$

$$v = \frac{-ylg\sqrt{x^2 + y^2} + xarctg\, y/x}{x^2 + y^2} = t \cdot \left(a_1 lgt + a_1 lg\sqrt{a^2 + a_1^2} - aarctg\frac{-a_1}{a}\right)$$

Zur Abkürzung werde gesetzt $u = t(algt + p)$, $v = t(a_1 lgt + p_1)$

$$\frac{p_1 u - pv}{a_1 u - av} + lg\frac{a_1 u - av}{a_1 p - a p_1} = 0 \text{ Bahngleichung.}$$

$$\zeta_1 = \left(\frac{1}{z^2} - \frac{1}{z^2}\, lgz\right)\left(a + a_1 i\right) z^2 = \left(1 - lg\sqrt{x^2 + y^2} - i arctg\, y/x\right) \cdot \left(a + a_1 i\right)$$

$$\xi_1 = a - a lg\sqrt{x^2 + y^2} + a_1 arctg\, y/x = a(1 + lgt) + p = \frac{du}{dt}$$

$$\tau_{i1} = a_1 - a_1 lg\sqrt{x^2 + y^2} - a arctg\, y/x = a_1(1 + lgt) + p_1 = \frac{dv}{dt}$$

$$a_1 \xi_1 - a\eta_1 = a_1 p - a p_1.$$

Die Hodographen sind gerade Linien.

b) $f(z) = 1 + z^2$

$$\int \frac{dz}{1 + z^2} = t + c + c_1 i = arctgz$$

$$z = tg(t + c + c_1 i) = \left(sin\, 2(t + c) + i\, \mathfrak{Sin}\; 2c_1\right) : \left(cos\, 2(t + c) + \mathfrak{Cos}\, 2c_1\right).$$

Setzt man zur Abkürzung

$$\mathfrak{Cos}\, 2c_1 = a,\ \mathfrak{Sin}\, 2c_1 = \sqrt{a^2 - 1},\ 2(t + c) = \tau,$$

so lauten die Bewegungsgleichungen

6) $$x = sin\, \tau : (a + cos\, \tau), \qquad y = \sqrt{a^2 - 1} : (a + cos\, \tau)$$

7) $$x^2 + \left(y - \frac{a}{\sqrt{a^2 - 1}}\right)^2 = \frac{1}{a^2 - 1} \text{ (Kreisschar).}$$

Beispiel: $Z = lg\sqrt{1 + z^2} = \frac{1}{2} lg(1 + x^2 - y^2 + 2xyi)$

$$e^{2u} = 2 : (a + cos\, \tau), \qquad tg2v = \sqrt{a^2 - 1} \cdot sin\, \tau : (1 + a\, cos\, \tau)$$

8)
$$u = lg\sqrt{2} - lg\sqrt{a + cos\, 2(t + c)},$$
$$v = \frac{1}{2} arctg \frac{\sqrt{a^2 - 1} \cdot sin\, 2(t + c)}{1 + a\, cos\, 2(t + c)}$$

Die Hodographenebene ist $\zeta_1 = \frac{dZ}{dz} \cdot (1 + z^2) = z.$

In diesem Falle ist also die z Ebene zugleich die Ebene des Hodographen, d. h. die Kreisschar 7)

ist die Hodographenschar ihrer Abbildung 8) durch $Z = lg\sqrt{1+z^2}$.

§ 11. Neben dem Verfahren, welches im ersten Abschnitt entwickelt und in den §§ 8—10 an einzelnen Beispielen durchgeführt ist, kann man in manchen Fällen auch auf einem andern Wege zur Lösung der vorliegenden Aufgabe gelangen, und zwar folgendermassen: § 11.

Es sei eine Funktion $Z = F(z)$ vorgelegt, für welche die Abweichung ϑ und das Vergrösserungsverhältnis ρ Funktionen der Zeit sind. Wenn es nun möglich ist, in z eine derartige Kurve $f(xy) = 0$ zu bestimmen, dass die Richtungstangente derselben, $\frac{dy}{dx} = tg\varphi$, dieselbe Funktion von x und y wie $tg\vartheta$ ist, und wenn sich ausserdem die Geschwindigkeit, mit der z die Bahn $f(xy) = 0$ beschreibt, so bestimmen lässt, dass $\frac{ds}{dt}$ und ρ dieselben Funktionen von x und y (oder von t) sind, so bestehen die Gleichungen

$$\Phi = \vartheta + \varphi = 2\vartheta, \qquad V_1 = V \cdot \rho = \rho^2.$$

Bildet man nun die Bewegung $f_2(uv) = 0$ durch $\zeta_1 = \zeta^2$ auf $f_3(\xi_1\eta_1) = 0$ ab, so werden die Abbildungen der Radien vom Nullpunkt der ζ Ebene gleichfalls Radien vom Nullpunkt der ζ_1 Ebene, und es bestehen ferner die Gleichungen

$$\rho_1 = \rho^2 = V_1, \qquad \vartheta_1 = 2\vartheta = \Phi.$$

Die Radien vom Nullpunkt der ζ_1 Ebene nach der Kurve $f_3(\xi_1\eta_1) = 0$ haben also gleiche Richtung und Grösse wie die Geschwindigkeit von Z in entsprechenden Punkten der Kurve $f_1(uv) = 0$, $f_3 = 0$ ist demnach Hodograph für $f_1 = 0$. Die Aufgabe besteht hier also, da $F(z)$ und ζ_1 gegeben sind, darin, Bewegungsgesetze in z zu finden, deren Abbildungen

durch ζ_1 Hodographen der Abbildungen durch Z sind.

Aus $u + vi = F(x + yi)$ folgt

$$\zeta = \xi + \eta i = \frac{dZ}{dz} = \frac{\partial Z}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x},$$

also

$$\xi = \frac{\partial u}{\partial x}, \qquad \eta = \frac{\partial v}{\partial x}.$$

Das Vergrösserungsverhältnis ist

$$\rho = \sqrt{\xi^2 + \eta^2} = \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2},$$

die Tangente des Ablenkungswinkels

$$tg\vartheta = \frac{\eta}{\xi} = \frac{\partial v}{\partial x} : \frac{\partial u}{\partial x}.$$

Die linke Seite der Gleichung einer Kurve $f(xy) = 0$, deren Tangente in jedem Punkt dem entsprechenden Radius Vektor $O\zeta$ parallel ist, muss demnach der Gleichung genügen

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\partial f}{\partial x} : \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x} : \frac{\partial u}{\partial x}$$

oder, da man setzen kann $\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$

$$-\frac{df}{dx} : \frac{df}{dy} = -\frac{\partial u}{\partial y} : \frac{\partial u}{\partial x}$$

Setzt man nun

$$\frac{\partial f}{\partial x} = p(xy)\frac{\partial u}{\partial y} \text{ und } \frac{\partial f}{\partial y} = p(xy)\frac{\partial u}{\partial x},$$

so erhält man die Bedingungsgleichung

$$\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy = df = p(xy)\frac{\partial u}{\partial y}dx + p(xy)\frac{\partial u}{\partial x}dy$$

da nun u als Funktion von x und y gegeben ist, so läuft die Aufgabe darauf hinaus, den Multiplikator $p(xy)$ der obenstehenden Differentialgleichung zu finden; ist derselbe gefunden, so liefert eine einfache Integration die Gleichung der gesuchten Kurve in z.

Die Lösung ist sehr einfach, wenn $p(xy)$ so bestimmt werden kann, dass $p(xy)\frac{\partial u}{\partial y}$ nur von x, $p(xy)\frac{\partial u}{\partial x}$ nur von y abhängt, wie folgendes Beispiel zeigt:

1 Beispiel: $Z = lgz, \quad u = lg\sqrt{x^2+y^2}$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{x}{x^2+y^2}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{y}{x^2+y^2}$$

Setzt man nun $p(xy) = \frac{x^2+y^2}{xy}$, so ist

$$p(xy)\frac{\partial u}{\partial y}dx + p(xy)\frac{\partial u}{\partial x}dy = \frac{dx}{x} + \frac{dy}{y}$$

also die Gleichung der Kurve in z ist

1) $$xy = c$$

dies ist eine Schar gleichseitiger Hyperbeln zwischen denselben Asymptoten. Der Tangentenwinkel derselben ist $tg\varphi = \frac{dy}{dx} = \frac{-y}{x}$, andrerseits folgt aus

$$\frac{dZ}{dz} = \frac{1}{z} = \frac{x-yi}{x^2+y^2},$$

dass die Tangente des Ablenkungswinkels

$$tg\vartheta = \frac{-y}{x} = tg\varphi$$

ist; es ist also in der That $\vartheta = \varphi$, und für die Abbildung der Schar 1) in Z ist $\Phi = 2\vartheta$.

Die Bahn des Punktes z ist also gefunden, die Geschwindigkeit desselben wird durch die zweite Bedingung bestimmt, dass das Vergrösserungsverhältnis der ZEbene gleich der Geschwindigkeit des Punktes z sein soll.

Aus $x \cdot y = c$ bildet man die Gleichungen

$$x = f(t), \qquad y = \frac{c}{f(t)}$$

Es ist nun $f(t)$ zu bestimmen.

$$\frac{dx}{dt} = \frac{df}{dt}, \qquad \frac{dy}{dt} = \frac{-c}{f^2}\frac{df}{dt},$$

also $$\frac{ds}{dt} = \sqrt{f^4 + c^2} \cdot \frac{1}{f^2} \cdot \frac{df}{dt}$$

$$\rho = \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{f}{\sqrt{f^4 + c^2}}$$

Es besteht folglich die Gleichung

$$\sqrt{f^4 + c^2} \cdot \frac{1}{f^2} \cdot \frac{df}{dt} = \frac{f}{\sqrt{f^4 + c^2}} \text{ oder}$$

$$\frac{f^4 + c^2}{f^3} df = dt$$

$$\frac{1}{2} f^2(t) - \frac{c^2}{2f^2(t)} = t + const$$

2) $$f(t) = \sqrt{t + b + \sqrt{(t+b)^2 + c^2}}.$$

Die Bewegung des Punktes z in der Schar 1) ist demnach bestimmt durch das Bewegungsgesetz:

3) $$\begin{cases} x = \sqrt{t + b + \sqrt{(t+b)^2 + c^2}}, \\ y = \sqrt{-(t+b) + \sqrt{(t+b)^2 + c^2}}. \end{cases}$$

Und damit ist die Aufgabe gelöst. Es ist eine Kurvenschar der z Ebene aufgefunden, für welche der Tangentenwinkel φ gleich dem Ablenkungswinkel ϑ ist, es ist ferner ein Bewegungsgesetz (mit willkürlicher Konstante b) aufgestellt, demzufolge die Geschwindigkeit V gleich dem durch die vorgelegte Abbildung bedingten Vergrösserungsverhältnis ρ ist, es bestehen also für die Kurvenschar $f_1(uv) = 0$ (Abbildung von $xy = c$ durch $Z = lgz$) die Gleichungen:

$$\Phi = 2\vartheta, \qquad V_1 = \rho^2.$$

Bildet man nun $f_2(\xi\eta) = 0$ durch $\zeta_1 = \zeta^2$ auf $f_3(\xi_1\eta_1) = 0$ ab, so ist $\rho_1 = \rho^2 = V_1$, $\vartheta_1 = 2\vartheta = \Phi$, die Kurven $f_3 = 0$ sind also die Hodographen der Bewegungen in Z.

Die Entwickelung der betreffenden Ausdrücke und Gleichungen bietet nun weiter keine Schwierigkeiten, es sollen jedoch zur Abkürzung der Rech-

nung die Integrationskonstanten näher bestimmt werden, und zwar soll sein $c=1$, $b=0$.

4) $$x=\sqrt{t+\sqrt{t^2+1}}, \qquad y=\sqrt{-t+\sqrt{t^2+1}}, \quad x\cdot y=1$$

5) $$u=lg\sqrt{x^2+y^2}=lg\sqrt[4]{4(t^2+1)},$$
$$v=arctgy/x=arctg(-t+\sqrt{t^2+1}).$$

6) $$2tgv=e^{2u}+\sqrt{e^{4u}-4}.$$

Um die Gleichung des Hodographen zu finden, bildet man die Funktion

$$\frac{\zeta}{z_1}=\frac{\zeta^2}{z^2}=\frac{1}{z^2}=\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}-\frac{2xyi}{(x^2+y^2)^2}$$

und setzt für x und y die entsprechenden Funktionen von t ein. Nach einigen Umformungen erhält man:

$$\xi_1=\frac{t}{2(t^2+1)}, \qquad \eta_1=\frac{-1}{2(t^2+1)}$$

7) $$4\xi_1^2(\xi_1^2+\eta_1^2)=\eta_1^2(1+2\eta_1),$$

d. i. eine Lemniskate, die demnach der Hodograph der Bewegung 5) ist.

2 Beispiel: $Z=e^z$.

$$u=e^x\cos y$$
$$\frac{\partial u}{\partial x}=e^x\cos y, \qquad \frac{\partial u}{\partial y}=-e^x\sin y$$

Man giebt dem Multiplikator den Wert

$$p(xy)=\frac{a}{e^x\sin y}.$$

$$\frac{a}{\sin y}\cdot\cos y dy-adx=actgydy-adx.$$

Durch Integration erhält man

$$f(xy)=-ax+alg\sin y+c_1$$

8) $$\sin y=e^{x+c}$$ (Gleichung der Kurve in z)

$$tg\varphi=\frac{dy}{dx}=tgy, \qquad \zeta=\frac{dZ}{dz}=e^z=Z,$$

also

$$tg\vartheta = \frac{v}{u} = tgy, \qquad \vartheta = \varphi.$$

Um die Geschwindigkeit zu bestimmen, setzt man:

$$\sin y = e^{x+c} = f(t), \qquad \cos y \cdot \frac{dy}{dt} = \frac{df}{dt},$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{\sqrt{1-f^2}} \cdot \frac{df}{dt}, \qquad \frac{dx}{dt} = \frac{1}{f} \cdot \frac{df}{dt}$$

$$\frac{ds}{dt} = \frac{1}{f\sqrt{1-f^2}} \cdot \frac{df}{dt},$$

$$\rho = \sqrt{\xi^2 + \eta^2} = e^{x} = e^{-c} \cdot f.$$

Es ist also f aus der Gleichung

$$e^{-c} \cdot f = \frac{1}{f\sqrt{1-f^2}} \cdot \frac{df}{dt} \text{ zu bestimmen.}$$

$$\frac{e^{c} \cdot df}{f^2\sqrt{1-f^2}} = dt$$

$$e^{c} \cdot -\frac{\sqrt{1-f^2}}{f} + a = t.$$

9) $$f(t) = \frac{1}{\sqrt{1 + (t-a)^2 \cdot e^{-2c}}} \qquad \frac{e^{c}}{\sqrt{e^{2c} + (t-a)^2}}.$$

10) $$\sin y = e^{c} : \sqrt{e^{2c} + (t-a)^2}, \qquad e^{x} = 1 : \sqrt{e^{2c} + (t-a)^2}$$

10) sind die Bewegungsgleichungen des Punktes z.

11)
$$\left|\begin{array}{l} u = e^{x}\cos y = (t-a) : \left(e^{2c} + (t-a)^2\right) \\ v = e^{x}\sin y = e^{c} : \left(e^{2c} + (t-a)^2\right) \end{array}\right.$$

12) $$u^2 + \left(v - \frac{1}{2e^{c}}\right)^2 = \frac{1}{e^{2c}}.$$

Die Abbildung der Kurven 10) ist also eine Kreisschar; die Mittelpunkte liegen auf der v Axe, alle Kreise berühren die u Axe im Nullpunkt. Die Gleichung 12) enthält nur die Konstante c, nicht

aber a, letztere findet sich in den Bewegungsgleichungen 11).

Die Ebene des Hodographen ist

$$\zeta_1 = \zeta^2 = e^{2z} = e^{2x}\cos 2y + ie^{2x}\sin 2y,$$

$$\xi_1 + \eta_1 i = \frac{(t-a)^2 - e^{2c} + i \cdot 2(t-a)e^{c}}{\left[(t-a)^2 + e^{2c}\right]^2}$$

oder

$$13) \qquad e^{2c} \cdot \rho_1 = \cos^2 \frac{\pi + \vartheta_1}{2}$$

(Gleichung der Hodographen).

3 Beispiel: Der Multiplikator soll so beschaffen sein, dass er die Veränderlichen nicht trennt.

Gegeben

$$Z = \frac{1}{z} = \frac{x - yi}{x^2 + y^2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{-2xy}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Es ist

$$X = p(xy) \cdot \frac{-2xy}{(x^2 + y^2)^2}\,dx + p(xy)\,\frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}\,dy$$

zu integrieren. Man setzt

$$p(xy) = -3(x^2 + y^2)^2,$$

$$X = 6xy\,dx - 3(y^2 - x^2)\,dy$$

$$X = \frac{\partial(3x^2y - y^3)}{\partial x}\,dx + \frac{\partial(3x^2y - y^3)}{\partial y}\,dy$$

$$14) \qquad f(xy) = 3x^2y - y^3 - c = 0.$$

Dies ist die Gleichung der Kurvenschar in z.

Nun ist noch die Bedingung zu erfüllen, dass $V = \rho$ ist. Die entsprechende Gleichung soll auf einem andern Wege als in den ersten beiden Beispielen entwickelt werden. Es ist:

$$V = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dt} : \frac{dx}{dt}\right)^2} \cdot \frac{dx}{dt}$$

$$\rho = \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} : \frac{\partial u}{\partial x}\right)^2} \cdot \frac{\partial u}{\partial x}.$$

Da nun

$$\frac{dy}{dt} : \frac{dx}{dt} = tg\varphi = tg\vartheta = \frac{\partial v}{\partial x} : \frac{\partial u}{\partial x}$$

ist, so sind die beiden Quadratwurzeln gleich, und die Bedingungsgleichung für $V = \rho$ ist

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x}.$$

In manchen Fällen, so z. B. in dem vorliegenden, ist es empfehlenswert, statt x y einzuführen; die Bedingungsgleichung lautet dann:

$$\sqrt{\left(\frac{dx}{dt} : \frac{dy}{dt}\right)^2 + 1} \cdot \frac{dy}{dt} = \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x} : \frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + 1} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}$$

oder, da

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} \quad \text{ist,}$$

15)
$$\frac{dy}{dt} = -\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Man muss nun aus 14) und 15) x eliminieren und erhält dann als Differentialgleichung der Bewegung in der z Ebene

$$dt = (c + 4y^3)^2 dy : 18y^2 \sqrt{\frac{y(c + y^3)}{3}}$$

Diese Gleichung lässt sich integrieren mit Hülfe elliptischer Integrale und liefert y implicit als Funktion von t, die Berechnung soll jedoch hier abgebrochen werden, da es sich nur darum handelte, den Weg kurz anzudeuten.

§ 12. Im Vorstehenden sind 2 Lösungen gebracht für die Aufgabe, zwei Scharen von Bewegungen zu finden, deren eine die Hodographenschar der andern ist. In beiden Fällen geht man von den Beziehungen aus, welche die beiden Ebenen Z und ζ_1, in denen die genannten Bewegungen stattfinden sollen, unter einander und mit einer dritten Ebene z verbinden. Beim ersten Verfahren werden diese Beziehungen ganz willkürlich gewählt und liefern eine Gleichung zwischen komplexen Grössen, aus der sich durch eine Integration ein Bewegungsgesetz für die z Ebene ergiebt. Die Abbildungen dieser Bewegung auf Z und ζ_1 stehen dann in der geforderten Beziehung (Bewegung — Hodograph). § 12.

Beim zweiten Verfahren ist die Beziehung zwischen Z und z auch willkürlich, die Beziehung zwischen ζ und z dagegen nicht. Es ist nämlich im § 11 die Möglichkeit der Entwickelung nur für den Fall nachgewiesen, dass $\zeta_1 = \left(\frac{dZ}{dz}\right)^2$ ist. Eine Erweiterung ist nun allerdings möglich. Das zweite Verfahren ist durch die Eigenschaft der Funktion $\zeta_1 = \zeta^2$ bedingt, dass sie Leitstrahlen vom Nullpunkt der ζ Ebene auf Leitstrahlen vom Nullpunkt der ζ_1 Ebene abbildet; dieselbe Eigenschaft haben alle Funktionen $\zeta_1 = \zeta^n$, bei denen n eine rationale Zahl darstellt, denn es ist

$$\xi_1 + \eta_1 i = \rho_1(\cos\vartheta_1 + i\sin\vartheta_1) = \rho^n\,(\cos n\vartheta + i\sin n\vartheta).$$

Man kann also das zweite Verfahren auf diese ganze Gruppe von Funktionen anwenden auf folgende Art:

Man bestimmt eine beliebige Funktion $Z = f(z)$, bildet die Funktion $\zeta_1 = \left(\frac{dF(z)}{dz}\right)^n$, sucht die Kurven-

schar $f(xy) = 0$ der z Ebene, deren Tangentenwinkel φ der Gleichung

$$tg\frac{\varphi}{n} = tg\vartheta = \frac{\partial v}{\partial x} : \frac{\partial u}{\partial x}$$

genügt und bestimmt das Bewegungsgesetz derartig, dass $\frac{ds}{dt} = \sqrt[n]{\rho}$ ist; dann liefert die Abbildung auf ζ_1 die Hodographenschar für die Abbildung der Bewegung auf Z.

Trotz dieser Erweiterung steht das zweite Verfahren dem ersten an Allgemeinheit der Anwendung nach, denn beim ersten ist die Beziehung zwischen ζ_1 und z völlig willkürlich, beim zweiten dagegen nur im Bereich der Funktion $\zeta_1 = \left(\frac{dZ}{dz}\right)^n$.

Ausserdem erreicht man beim ersten Verfahren dieselbe Allgemeinheit der Lösung durch eine Integration, für welche beim zweiten zwei Integrationen erforderlich sind.

Endlich setzt die Entwickelung von $tg\frac{\varphi}{n}$, sobald $n > 2$ ist, der praktischen Brauchbarkeit des zweiten Verfahrens noch engere Grenzen.

Zweite Aufgabe. **Eine gegebene Bewegung so abzubilden, dass sie der Hodograph ihrer Abbildung ist.**

§ 13. § 13. Die vorgelegte Bewegung erfolge in der z Ebene, x und y seien als Funktionen der Zeit gegeben. Nun ist, wenn die bisherige Bezeichnung beibehalten wird, ζ_1 die Ebene des Hodographen, und die 3 Bewegungen in den Ebenen z Z ζ_1 sind im Allgemeinen von einander verschieden. Der Fall, dass 2 dieser Ebenen kongruent sind, ist als Beispiel

bereits in § 10 behandelt; die vorliegende Aufgabe ist auf die erste zurückgeführt, wenn es gelingt, die Bedingungen aufzufinden, unter denen die Bewegungen in ζ_1 und z kongruent sind.

Es ist

$$\zeta_1 = \frac{dZ}{dz} \cdot \frac{dz}{dt}$$

und dieser Ausdruck soll gleich z sein, es ist also aus der Gleichung

$$1) \qquad \frac{dZ}{dz} \cdot \frac{dz}{dt} = z$$

Z als Funktion von z zu berechnen, dann ist die Aufgabe gelöst, die gesuchte Abbildfunktion dargestellt.

z ist als Funktion von t gegeben oder kann in diese Form gebracht werden. Nun muss umgekehrt $\frac{dz}{dt}$ als Funktion von z dargestellt werden. Zuweilen gelingt dies sehr leicht, wenn z. B. das Bewegungsgesetz a) aus § 8 vorliegt,

$$x = g \cdot e^{at} \cos h, \qquad y = g \cdot e^{at} \sin h,$$

so ist

$$\frac{dx}{dt} = ag \cdot e^{at} \cos h = ax$$

$$\frac{dy}{dt} = ag \cdot e^{at} \sin h = ay,$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{dx}{dt} + i\frac{dy}{dt} = ax + iay = a(x + iy) = az.$$

In vielen Fällen ist es jedoch nicht möglich, auf so einfache Art $\frac{dz}{dt}$ als Funktion von z darzustellen, man muss dann aus $z = f_1(t) + if_2(t)$ t explicit als Funktion von z darstellen und differentiieren.

§ 14. § 14. Beispiele.

1 Beispiel: (Centralbewegung.) Der Punkt z beschreibt eine Ellipse

2) $$\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2=1$$

unter dem Einfluss einer Kraft, deren Richtung durch den Mittelpunkt der Ellipse geht und deren Grösse dem Abstand des Punktes z vom Mittelpunkte proportional ist. Diese Bewegung soll so abgebildet werden, dass 2) der Hodograph der Abbildung ist.

3) $x=a\cos t, \quad y=b\sin t$ (Bewegungsgleichungen)

$$z=x+yi=a\cos t+bi\sin t$$

$$\frac{z}{\sqrt{a^2-b^2}}=\frac{a}{\sqrt{a^2-b^2}}\cos t+\frac{bi}{\sqrt{a^2-b^2}}\sin t.$$

Man setzt nun

$$\frac{a}{\sqrt{a^2-b^2}}=\cos\alpha, \qquad \frac{bi}{\sqrt{a^2-b^2}}=\sin\alpha$$

$$\frac{z}{\sqrt{a^2-b^2}}=\cos\alpha\cos t+\sin\alpha\cdot\sin t=\cos(\alpha-t)$$

$$t=\operatorname{arctg}\frac{bi}{a}-\operatorname{arc\,cos}\frac{z}{\sqrt{a^2-b^2}}$$

$$\frac{dz}{dt}=\sqrt{a^2-b^2-z^2}$$

4) $$\int dZ=\int\frac{z\,dz}{\sqrt{a^2-b^2-z^2}}=-\sqrt{a^2-b^2-z^2}$$

$$u+vi+k+k_1i=-\sqrt{a^2-b^2-x^2+y^2-2xyi}$$

$$=-\sqrt{a^2\sin^2t-b^2\cos^2t-2abi\cos t\sin t}$$

$$=a\sin t-bi\cos t$$

5) $$u=a\sin t-k, \qquad v=-b\cos t-k_1,$$

6) $$\left(\frac{u+k}{a}\right)^2+\left(\frac{v+k_1}{b}\right)^2=1.$$

6) ist die Bahngleichung in Z, k und k_1 sind willkürliche Integrationskonstanten, die Ellipsen 6) stellen also alle Ellipsen der Z Ebene dar, welche den Ellipsen 2) kongruent sind und sich durch Verschiebung (parallel zu den Axen) mit ihnen zur Deckung bringen lassen. — Die Gleichungen 5) lehren, dass die Ellipsen 6) nach demselben Gesetz wie die Ellipsen 2) durchwandert werden; z und Z liegen so, dass sie, wenn beide Ellipsen aufeinander gelegt werden, sich in Endpunkten konjugierter Durchmesser befinden. Setzt man $k = k_1 = 0$, $t = x$, so erhält man als Einzelfall die in § 3 erörterte Bewegung.

Die Ellipsen 2), in denen sich ein Punkt z nach dem oben genannten Anziehungsgesetz bewegt, sind also die Hodographen für alle kongruenten Ellipsen, welche nach demselben Gesetz beschrieben werden und deren Axen denen der erstgenannten parallel sind; sie stehen in der Verwandtschaft

$$Z = -\sqrt{a^2 - b^2 - z^2} + const.$$

2 Beispiel: z bewegt sich in dem Kreise

7) $$x^2 + y^2 + \frac{y}{c} = 0$$

nach dem Gesetz

8) $$x = \frac{t}{t^2 + c^2}, \qquad y = \frac{-c}{t^2 + c^2}$$

Diese Bewegung soll so abgebildet werden, dass 7) der Hodograph der Abbildung ist.

$$z = x + yi = \frac{t - ci}{t^2 + c^2} = \frac{1}{t + ci}, \quad t + ci = \frac{1}{z}, \quad \frac{dz}{dt} = -z^2$$

$$Z = \int z dz : \frac{dz}{dt} = \int -\frac{1}{z} dz = -lgz + k + k_1 i$$

$$u + vi = k + k_1 i - lg\sqrt{x^2 + y^2} - iarctg\, y/x$$

9)
$$\begin{vmatrix} u = -lg\frac{1}{\sqrt{t^2+c^2}} + k = lg\sqrt{t^2+c^2} + k \\ v = -arctg\frac{-c}{t} + k_1 = arctg\frac{c}{t} + k_1. \end{vmatrix}$$

Die vorgelegte Bahn 7) ist der Hodograph der Bewegung 9) und wird auf derselben durch $Z = -lgz + const$ abgebildet.

§ 15. § 15. Als besonderer Fall dieser Aufgabe kann auch die in der Einleitung erwähnte Frage behandelt werden

> „ob nur das Gesetz des umgekehrten Quadrats der Entfernung Bewegungen erzeugt, denen Kreishodographen entsprechen“ (vergleiche Hamilton, Quaternionen),

oder ob es, abgesehn von dem zweiten daselbst angeführten Fall, noch andere Kräfte giebt, die die genannte Eigenschaft besitzen.

Die Aufgabe wird im Anschluss an § 13 folgendermassen gelöst:

Da der Hodograph ein Kreis sein soll, so ist also die Bewegung in der ζ_1 Ebene bekannt, und die Bewegung in der Z Ebene wird aus den vorgelegten Bedingungsgleichungen dargestellt.

Der allgemeinste Ausdruck für die Kreisbewegung ist

10) $\xi_1 = a + \sqrt{r^2 - f(t)} \qquad \eta_1 = b + \sqrt{f(t)}.$

In diesen Gleichungen bedeutet $f(t)$ eine ganz beliebige Funktion von t; ein Punkt ζ_1, der sich nach diesem Gesetz bewegt, beschreibt einen Kreis um den Mittelpunkt $a + bi$ mit dem Radius r.

$$\zeta_1 = a + bi + \sqrt{r^2 - f(t)} + i\sqrt{f(t)}$$

$$Z = \int \zeta_1 \, d\zeta_1 + const$$

$$Z = \int [a + \sqrt{r^2 - f(t)}]dt + i \int [b + \sqrt{f(t)}]dt + const$$

11)
$$\begin{cases} u = at + \int \sqrt{r^2 - f(t)}dt + c_1 \\ v = bt + \int \sqrt{f(t)}dt + c_2 \end{cases}$$

Alle Bewegungen der Z Ebene, welchen Kreishodographen entsprechen, müssen den Gleichungen 11) genügen oder sich in die Form 11) überführen lassen, und umgekehrt: wenn die Bewegungsgleichungen eines Punktes die Form 11) haben oder sich als besondere Fälle von 11) ausweisen, so ist der Hodograph des Punktes ein Kreis. Indem man nun $f(t)$ bestimmte Werte giebt, kann man beliebig viele Bewegungsgesetze der verlangten Art aufstellen, und es ist offenbar, dass das Gesetz 11) allgemeiner ist als das Gesetz des umgekehrten Quadrats der Entfernung.

Beispiel: $f(t) = r^2 sin^2 mt.$

12)
$$\begin{cases} u = at + r \int cos\, mt dt + c_1 = at + \frac{r}{m} sin\, mt + c_1 \\ v = bt + r \int sin\, mt dt + c_2 = bt - \frac{r}{m} cos\, mt + c_2 \end{cases}$$

Ist a (oder b) gleich 0, so wird die Bahn des Punktes Z eine Cykloide, deren Hodograph demgemäss ein Kreis ist; der Mittelpunkt desselben liegt auf der Geraden c_1 (oder c_2).

Die Konstanten sollen näher bestimmt werden: $b = c_1 = 0$, $c_2 = r$, $a = -r$, $m = 1$; ferner $t = -\tau$

13) $u = r\tau - r\, sin\, \tau, \qquad v = r - r\, cos\, \tau.$

Dies ist eine Cykloide mit dem Wälzungswinkel τ, deren Erzeugungskreis den Radius r hat und auf der u Axe rollt.

$$\frac{du}{d\tau} = r - r\cos\tau \qquad \frac{dv}{d\tau} = r\sin\tau$$

$$\frac{d^2u}{d\tau^2} = r\sin\tau \qquad \frac{d^2v}{d\tau^2} = r\cos\tau.$$

Die Beschleunigung ist konstant gleich r, die Richtungstangente derselben ist

$$tg\psi = ctg\tau, \qquad \psi = \frac{\pi}{2} - \tau.$$

Die Beschleunigung lässt sich also nach Grösse und Richtung darstellen durch den vom Cykloidenpunkt nach dem Mittelpunkt des Rollkreises gezogenen Radius; diese Radien gehen nicht durch einen Punkt sondern sind die Tangenten einer Cykloide, wie folgende Rechnung zeigt:

Die Gleichung des genannten Radius ist

$$y - v = \frac{v - r}{u - r\tau}(x - u)$$

oder

14) $$x\cos\tau - y\sin\tau = r\tau\cos\tau - r\sin\tau.$$

Man differentiiert nach τ

15) $$-x\sin\tau - y\cos\tau = -r\tau\sin\tau.$$

Aus beiden Gleichungen 14) und 15) ergiebt sich nach einigen Umformungen

$$\left|\begin{array}{l} x = r\tau - r\sin\tau\cos\tau \\ y = r\sin^2\tau \end{array}\right.$$

16)

$$\left|\begin{array}{l} x = \frac{r}{2}\cdot 2\tau - \frac{r}{2}\sin 2\tau \\ y = \frac{r}{2} - \frac{r}{2}\cos 2\tau. \end{array}\right.$$

16) ist die Gleichung einer Cykloide, deren Rollkreis auf der u Axe rollt, welche denselben Anfangspunkt wie die Cykloide 13), dagegen den halben Radius und den doppelten Wälzungswinkel hat wie die letztere. Diese Cykloide ist die Umhüllungskurve aller Radien, welche mit der Richtung der

beschleunigenden Kraft zusammenfallen; die Bewegung des Punktes Z wird also nicht durch eine Centralkraft hervorgebracht und besitzt trotzdem einen Kreishodographen.

Durch geeignete Bestimmung von $f(t)$ kann man leicht noch andere Bewegungsgesetze der genannten Art aufstellen.

Dritte Aufgabe. **Eine gegebene Bewegung so abzubilden, dass die Abbildung der Hodograph der Bewegung ist.**

§ 16. Die Behandlung dieser Aufgabe ist der zweiten ähnlich: man sucht die Bedingung dafür, dass die ZEbene der zEbene kongruent ist, und bestimmt aus der Bedingungsgleichung ζ_1. § 16.

$$z = Z, \qquad \frac{dZ}{dz} = 1,$$

$$1) \qquad \zeta_1 = \frac{dZ}{dz} \cdot \frac{dz}{dt} = \frac{dz}{dt}.$$

Es ist also nur nötig, z als Funktion von t, $\frac{dz}{dt}$ als Funktion von z darzustellen.

§ 17. Beispiele. § 17.

1 Beispiel. Ein Punkt bewegt sich nach dem Wurfgesetz (im widerstandslosen Mittel). Die Bewegung auf ihrem Hodographen abzubilden.

$$2) \qquad x = at^2 + bt + c, \qquad y = b_1 t + c_1$$

$$z = at^2 + (b + b_1 i)t + c + c_1 i$$

$$t = -\frac{b + b_1 i}{2a} + \frac{1}{2a}\sqrt{(b + b_1 i)^2 - 4a(c + c_1 i) + 4az}$$

$$dt = dz : \sqrt{(b + b_1 i)^2 - 4a(c + c_1 i) + 4az}$$

$$3) \qquad \zeta_1 = \xi_1 + \eta_1 i = \frac{dz}{dt} = \sqrt{(b + b_1 i)^2 - 4a(c + c_1 i) + 4az}$$

Erhebt man nun beide Seiten ins Quadrat, trennt Reelles und Imaginäres und setzt statt x und y ihre Werte in t, so ergiebt sich

4) $\eta_1 = \pm b, \qquad \xi_1 = \pm (2at + b)$

Der Hodograph der Wurfbewegung ist eine Gerade, die mit gleichmässiger Geschwindigkeit durchlaufen wird; beide Bahnen stehen in der Verwandtschaft 3).

2 Beispiel (Centralbewegung): z beschreibt nach dem Gesetz

4) $x = a \cos mt + b \sin mt, \qquad y = a_1 \cos mt + b_1 \sin mt$

eine Ellipse

5) $(a_1 x - a y)^2 + (b_1 x - b y)^2 = (a_1 b - a b_1)^2$

Die Bewegung soll auf ihrem Hodographen abgebildet werden.

$$z = (a + a_1 i) \cos mt + (b + b_1 i) \sin mt.$$

Man setzt

$$\frac{b + b_1 i}{a + a_1 i} = tg(\alpha + \beta i)$$

$$z = \sqrt{(a + a_1 i)^2 + (b + b_1 i)^2} \cdot \sin(mt + \alpha + \beta i)$$

$$m dt = dz : \sqrt{(a + a_1 i)^2 + (b + b_1 i)^2 - z^2}$$

6) $$\zeta_1 = \frac{dz}{dt} = m \sqrt{(a + a_1 i)^2 + (b + b_1 i)^2 - z^2}$$

7)
$$\left| \begin{array}{l} \frac{1}{m^2} (\xi_1^2 - \eta_1^2) = a^2 - a_1^2 + b^2 - b_1^2 - x^2 + y^2 \\ \frac{1}{m^2} \cdot 2 \xi_1 \eta_1 = 2aa_1 + 2bb_1 - 2xy \end{array} \right.$$

Es sind nun x und y durch t zu ersetzen.

$$x^2 = a^2 \cos^2 mt + 2ab \cos mt \sin mt + b^2 \sin^2 mt$$

$$y^2 = a_1^2 \cos^2 mt + 2a_1 b_1 \cos mt \sin mt + b_1^2 \sin^2 mt$$

$$x^2 - y^2 = (a^2 - a_1^2) \cos^2 mt + (b^2 - b_1^2) \sin^2 mt + 2(ab - a_1 b_1) \cos mt \sin mt$$

$$\frac{1}{m^2} (\xi_1^2 - \eta_1^2) = (a^2 - a_1^2) \sin^2 mt + (b^2 - b_1^2) \cos^2 mt - 2(ab - a_1 b_1) \cos mt \sin mt$$

$$\frac{1}{m^2}(\xi_1^2 - \eta_{l1}^2) = (-a \sin mt + b \cos mt)^2 - (-a_1 \sin mt + b_1 \cos mt)^2$$

8) $$\xi_1^2 - \eta_{l1}^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 - \left(\frac{dy}{dt}\right)^2$$

$$xy = aa_1 \cos^2 mt + (ab_1 + a_1 b)\cos mt \sin mt + bb_1 \sin^2 mt$$

$$\frac{1}{m^2}\xi_1 \eta_{l1} = aa_1 \sin^2 mt - (ab_1 + a_1 b)\cos mt \sin mt + bb_1 \cos^2 mt$$

9) $$\xi_1 \eta_{l1} = \frac{dx}{dt} \cdot \frac{dy}{dt}$$

Aus 8) und 9) folgt

$$\xi_1 = \frac{dx}{dt}, \qquad \eta_{l1} = \frac{dy}{dt},$$

also der Hodograph ist [mittelst der Abbildung 6)] dargestellt durch die Gleichungen

$$\frac{\xi_1}{m} = -a \sin mt + b \cos mt$$

$$\frac{\eta_{l1}}{m} = -a_1 \sin mt + b_1 \cos mt$$

Aus beiden ergiebt sich die Bahngleichung

10) $$(a_1\xi_1 - a\eta_{l1})^2 + (b_1\xi_1 - b\eta_{l1})^2 = m^2(a_1 b - ab_1)^2$$

Die Ellipsen 5) werden durch die Funktion 6) auf ihren Hodographen, den Ellipsen 10), abgebildet; verändert man m und dadurch auch das Bewegungsgesetz 4), so erhält man andere Hodographen, die aber — wenn die Konstanten a und b unverändert bleiben — ähnlich und ähnlich gelegen sind; für $m = 1$ fallen die Bahnen 5) und 10) zusammen.

Das erste Beispiel in § 14 kann als besonderer Fall aus diesem Gesetz abgeleitet werden, wenn man $a_1 = b = 0$, $m = 1$ setzt.